УДК 514.18

КОНСТРУЮВАННЯ РОЗГОРТНИХ ПОВЕРХОНЬ В РІЗНИХ СИСТЕМАХ КООРДИНАТ

Кресан Т.А.

к.т.н., ст. викладач ВП НУБіП України «Ніжинський агротехнічний інститут»

Анотація: Математичне моделювання або системний підхід стає все більш поширеним методом дослідження. Єдність форм поверхонь, які переміщуються у пружному середовищі, створених природою і людиною, знайдені їх геометричні аналогії дозволяють створити ідеальну математичну модель поверхні [1].

Ключові слова: розгортна поверхня, торс, система координат, тригранник Френе, алгебраїчна крива.

Постановка проблеми: В умовах технічного прогресу та світової економічної кризи до утворення і задання поверхонь висуваються вимоги, виконання яких забезпечує реалізацію технологічних, естетичних та економічних чинників. З таких позицій особливий клас поверхонь складають розгортні або торсові поверхні, так як процес конструювання технічних форм на їх основі значно спрощується через можливість побудови розгорток із заданим ступенем точності.

Виклад основного матеріалу: Класична теорія розгортних поверхонь була розроблена в працях видатних вчених: Л. Ейлера, який вперше записав загальне їх рівняння, виходячи із заданого ребра звороту і Г. Монжа, який розробив свою теорію поверхонь з точки зору їх форм та кривини, вивів рівняння торса, що проходить через дві просторові або плоскі криві та описав поверхні з ребром звороту, які використовуються при побудові насипів дорожнього полотна і дамб (поверхні однакового нахилу твірних).

Торсовою, або розгортною поверхнею називається обвідна поверхня однопараметричної множини площин. Різні автори використовували різні підходи до конструювання торсів за допомогою рухомої площини.

Алгебраїчні лінійчаті поверхні 4-го порядку достатньо вивчені як в аналітичній так і в синтетичній формі. Найбільш широко вивченням цього питання займалися Обухова В.С. та її учні.

Як окремий випадок розглянуто конструювання торса, при якому алгебраїчними кривими другого порядку є параболи, розміщені в паралельних площинах (рис. 1). Твірні такого торса, проходять через відповідні точки кривих другого порядку, які утворюються при їх обкатці спільною дотичною площиною [2]:

$$\begin{aligned} &x = \frac{ak^2 + bk + c}{(Rk - S)^2}; && \bar{x} = \frac{\bar{a}k^2 + \bar{b}k + \bar{c}}{(Rk - S)^2}; \\ &y = 0; && \bar{y} = L; \\ &z = \frac{pk^2 + ek + q}{(Rk - S)^2}; && \bar{z} = \frac{\bar{p}k^2 + \bar{e}k + \bar{q}}{(Rk - S)^2}, \end{aligned} \qquad (1.1)$$

$R = x_2 - 2x_3;\ S = z_2 - 2z_3;\ a = -x_3^2 R;\ b = 2x_3^2 S;\ c = z_3^2 R - 2x_3 z_3 S;$

$p = x_3^2 S - 2x_3 z_3 R;\ e = 2x_3^2 R;\ q = -z_3^2 S;\ x_1 = z_1 = y_1 = y_2 = y_3;$

x_2, x_3, z_2, z_3 – вихідні дані.

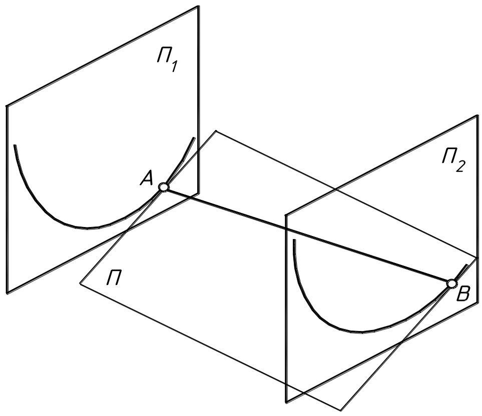

Рис. 1. Алгебраїчний торс, напрямними якого є параболи в паралельних площинах

Є випадки, коли процес конструювання поверхонь значно спрощується при використанні спеціальних систем відліку. Скідан І.А. розробив спосіб конструювання торсової поверхні, який полягає у відшуканні твірної торса у площині-носію Ω^n, що обертається за заданим законом навколо осі *Oz* в різних системах координат: узагальнених циліндричних (рис. 2, а) , гіперболічних (рис. 3, б) та квазісферичних координатах (рис. 2, в) [3]. Функції залежності прямокутних декартових координат x, y, z від спеціальних координат t, u, v (або t, ρ, β для квазісферичних координат) задаються у вигляді:

$$x = x(t,u,v);\; y = y(t,u,v);\; z = z(t,u,v)$$
$$\text{або}\; x = x(t,\rho,\beta);\; y = y(t,\rho,\beta);\; z = z(t,\rho,\beta). \qquad (1.2)$$

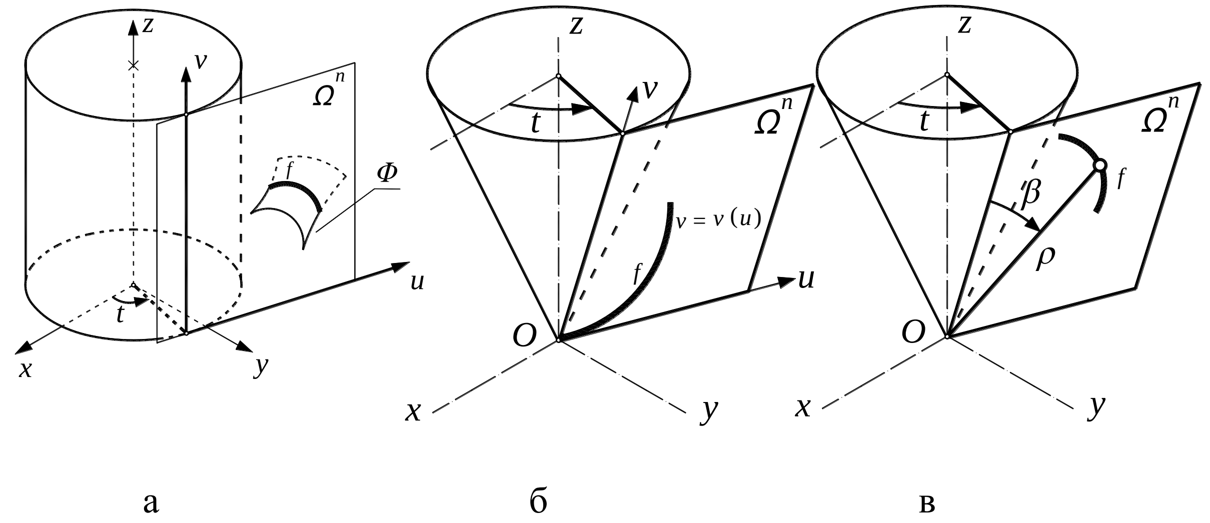

Рис.1.3. Знаходження твірної торса в площині, яка рухається за заданим законом [3]:

а) в узагальнених циліндричних координатах;

б) у гіперболічних координатах;

в) у квазісферичних координатах.

В 1847 році при вивченні просторових кривих французький математик Жан Фредерік Френе, а в 1851 році незалежно від нього Жозеф Альфред Серре відкрили формули, які дають можливість вивчення геометричних об’єктів пов’язаних із заданою просторовою кривою. Розв’язання задач, які вимагають можливості управління наперед заданими диференціальними параметрами поверхонь значно полегшується при використанні формул Сере-Френе, так як значно спрощуються вирази при аналітичних перетвореннях, оскільки ці формули виражають похідні ортів супровідного тригранника Френе $\bar{\tau}, \bar{n}, \bar{b}$ через функції цих же векторів.

Використання натуральної системи координат (системи супровідного тригранника Френе) для кривої заданої у функції довжини дуги s при конструюванні поверхонь дає можливість застосування формул Серре-Френе для аналітичних перетворень [4]

$$\bar{\tau}'_s = k \cdot \bar{n}; \qquad \bar{n}'_s = -k \cdot \bar{\tau} + \sigma \cdot \bar{b}; \qquad \bar{b}'_s = -\sigma \cdot \bar{n}, \tag{1.3}$$

де $\bar{\tau}, \bar{n}, \bar{b}$ – орти дотичної, головної нормалі та бінормалі відповідно напрямної кривої;

k – кривина ,

σ – скрут напрямної кривої у точці.

Якщо просторову напрямну криву задано параметричними рівнянням

$$x = x(t);\ y = y(t);\ z = z(t), \tag{1.4}$$

де t – незалежна змінна (довільний параметр), то кривину k і скрут σ кривої визначають із формул [60]:

$$k = \frac{\sqrt{(x'y'' - x''y')^2 + (y'z'' - y''z')^2 + (x'z'' - x''z'')^2}}{\left(x'^2 + y'^2 + z'^2\right)^{\frac{3}{2}}}, \tag{1.5}$$

$$\sigma = \frac{\begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y' & z' \\ y'' & z'' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z' & x' \\ z'' & x'' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix}^2}. \tag{1.6}$$

Довжина дуги кривої s знаходиться за формулою:

$$s = \int \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}\, dt. \tag{1.7}$$

Якщо із (1.7) можливо виразити функцію $t = t(s)$, то параметричні рівняння кривої записуються у функції її довжини дуги (s – натуральний параметр)

$$x = x(s);\ y = y(s);\ z = z(s). \tag{1.8}$$

Перехід до нерухомої декартової системи координат здійснюється за допомогою дев'яти напрямних косинусів.

Якщо геометричним образом, що конструює поверхню за допомогою тригранника Френе, буде площина, то утворена поверхня є обвідною однопараметричної сім'ї площин тобто торсом .

У роботі С.Ф. Пилипаки [5] було запропоновано закон утворення лінійчатих поверхонь у системі тригранника Френе напрямної кривої, коли параметри зміни положення прямолінійної твірної по відношенню до тригранника Френе визначалися функціями кутів (рис. 3):

$\varepsilon(s)$ – між площиною, утвореною вектором прямолінійної твірної і ортом дотичної тригранника та стичною площиною тригранника Френе;

$\gamma(s)$ – між ортом дотичної і вектором прямолінійної твірної.

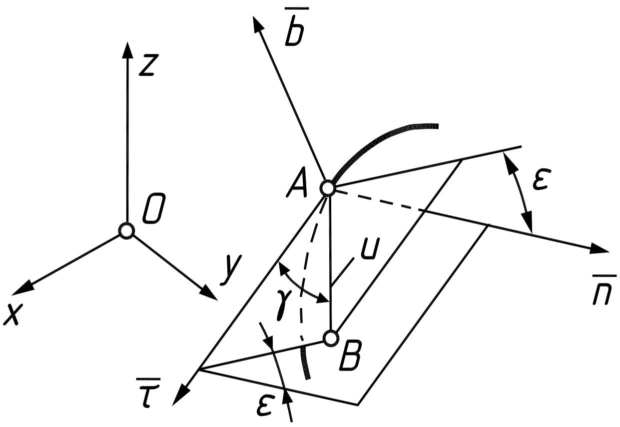

Рис.3 Супровідний тригранник Френе просторової напрямної кривої із прямолінійною твірною *AB* у його системі [67].

Висновки:

В сучасних умовах актуальною є розробка інженерних способів геометричного конструювання раціональних кривих і поверхонь та використання їх у проектуванні технічних форм за наперед заданими умовами з отриманням рівнянь у параметричному вигляді. Такі рівняння є зручними при конструюванні технічних поверхонь з використанням внутрішніх систем математичних розрахунків. До цієї задачі відноситься і розробка способів побудови торсів, які дають можливість більш гнучкого пристосування до конкретних наперед заданих умов і вимог реального проектування.

Список використаних джерел:

1. Ананенко Т.А. Конструювання обвідних поверхонь однопараметричної множини площин та побудова їх розгорток: Дис .

канд. техн. наук: 05.01.01 / Т.А. Ананенко – Київський націон. унів. будівн. і архітектури. – Київ, 2012. – 210 с.

2. Обухова В.С. О конструировании отвальной поверхности с использованием ЭВМ / В.С. Обухова, А.Л. Мартиросов // Прикл. геометрия и инж. графика.– К.: Будівельник, 1978. – № 25. – С. 83 – 84.

3. Скидан И.А. Геометрическое моделирование кинематических поверхностей в специальных координатах: Автореф. дис... д-ра техн. наук: 05.01.01/ И.А. Скидан. – Моск. автомобильно-дорожный институт. – М., 1989. – 37 с.

4. Милинский В.И. Дифференциальная геометрия / В.И. Милинский -Л.: Кубуч, 1934. - 332 с.

5. Пилипака С.Ф. Конструювання лінійчатих поверхонь за заданою напрямною кривою, котра є спеціальною лінією поверхні / С.Ф. Пилипака // Прикл. геометрія та інж. графіка. –К.: КДТУБА, 1996.– № 60. – С.87–89.

Аннотация: Математическое моделирование или системный подход становится все более распространенным методом исследования. Единство форм поверхностей, перемещаются в упругой среде, созданных природой и человеком, найденные их геометрические аналогии позволяют создать идеальную математическую модель поверхности.

Ключевые слова: развертываемая поверхность, торс, система координат, трехгранник Френе, алгебраическая кривая.

Summary: Mathematical modeling or systematic approach is becoming an increasingly widespread research method. The unity of the forms of surfaces that move in an elastic environment created by nature and man, their geometric analogies found can create an ideal mathematical model of the surface.

Keywords: scattering surface, torso, coordinate system, triangle of Frenet, algebraic curve.