



УДК 62:534(031)

МОДЕЛЬ МЕХАНІЧНОГО ОСЦИЛЯТОРА З СУХИМ ТЕРТЯМ У КІНЕМАТИЧНО-СИЛОВОМУ АНАЛІЗІ МАЯТНИКОВИХ КОЛИВАНЬ ВАНТАЖУ ПРИ ГАЛЬМУВАННІ КРАНІВ

Ловейкін В.С.¹, д.т.н., професор; Човнюк Ю.В.¹, к.т.н., доцент;

Діктерук М.Г.², к.т.н., доцент; Почка К.І.², к.т.н., доцент

¹*Національний університет біоресурсів і природокористування України*

²*Київський національний університет будівництва і архітектури*

Проведений кінематично-силовий аналіз маятникових коливань вантажу при гальмуванні мостових кранів. Для встановлення закону руху та його кінематичних характеристик, визначення сили натягу канатів (його горизонтальної складової) використана відома у літературі модель механічного осцилятора з сухим тертям.

Модель, механічний осцилятор, сухе тертя, кінематично-силовий аналіз, маятникові коливання, вантаж, гальмування, крани.

Постановка проблеми. При роботі кранів спостерігаються маятникові коливання вантажу, які викликають нерівномірний рух вантажопідйомних кранів чи вантажних візків (мостових кранів), додаткові навантаження на силові елементи кранів, створюють незручності при їх експлуатації, що необхідно враховувати при уточнених розрахунках динамічних навантажень кранів у процесі їх пуску та гальмування.

Аналіз публікацій по темі дослідження. Динаміку вантажопідйомних кранів вивчав автор [3], який запропонував математичну модель для аналізу процесу розгойдування вантажу при пуску й гальмуванні кранів. Модель осцилятора з сухим тертям вперше використав В. Каннінгхем, який проінтегрував відповідне диференціальне рівняння, що описує його рух [1, 2]. Результати робіт [1-3] будуть використані у даному дослідженні.

Мета даної роботи полягає у встановленні основних закономірностей маятникових коливань вантажу при гальмуванні мостових кранів в межах моделей робіт [1-3].

Виклад основного змісту дослідження. Розрахунок маятникових коливань вантажу на канатах можна вести за найпростішою схемою двомасової системи [3]. Введемо наступні позначення: m_1 – маса крану/вантажного візка; m_2 – маса вантажу; $G = m_2 \cdot g$ – вага вантажу; g – прискорення вільного падіння; P – сумарне тягове чи гальмівне зусилля приводних коліс крану чи візка; W – сила опору пересуванню крану чи візка; x_1 та x_2 – горизонтальні переміщення мас m_1 та m_2 ; S – сумарне значення натягу канатів; φ – кут відхилення канатів від вертикалі; T – горизонтальна складова зусилля у канатах; H – довжина виска канату.

Зазвичай максимальні відхилення канатів від вертикалі не перевищують $10...12^\circ$, тому приймаємо $\sin \varphi \approx \varphi$, $\cos \varphi \approx 1,0$. Із врахуванням цього припущення $x_2 = x_1 + H \cdot \varphi$, $S = G = m_2 \cdot g$, а горизонтальна складова натягу канатів:

$$T = S \cdot \varphi = \frac{m_2 \cdot g \cdot (x_2 - x_1)}{H}, \quad (1)$$

де $g = 9,81 \text{ м/с}^2$.

Рівняння руху крану має вид:

$$m_1 \cdot \ddot{x}_1 + \frac{m_2 \cdot g}{H} \cdot (x_1 - x_2) = P - W, \quad (2)$$



а рівняння руху вантажу у горизонтальному напрямку:

$$m_2 \cdot \ddot{x}_2 + \frac{m_2 \cdot g}{H} \cdot (x_2 - x_1) = 0. \quad (3)$$

Приведена динамічна система, у котрій маса m_2 ковзає вповдовж опорної поверхні без тертя, описується рівняннями [3]:

$$\begin{cases} m_1 \cdot \ddot{x}_1 + c \cdot (x_1 - x_2) = P - W; \\ m_2 \cdot \ddot{x}_2 + c \cdot (x_2 - x_1) = 0. \end{cases} \quad (4)$$

Порівнюючи систему рівнянь (2) та (3) з (4), можна зазначити, що обидві системи ідентичні, якщо прийняти:

$$c = \frac{m_2 \cdot g}{H}. \quad (5)$$

Звідси випливає, що динамічний вплив вантажу, що коливається, на кран (чи візок) аналогічний впливу вантажу, закріпленого за допомогою пружини з жорсткістю, яка чисельно дорівнює G/H . Ця аналогія дозволяє наочно оцінити вплив вантажу, що розгойдується, на рух крану. Коли $x_2 > x_1$, вантаж, що відхиляється, збільшує сили опору пересуванню крану. Коефіцієнт $c = G/H$ є аналогом коефіцієнту поперечної жорсткості канатів. Аналогова схема маятникових коливань вантажу (для мостового крану) наведена на рис. 1.

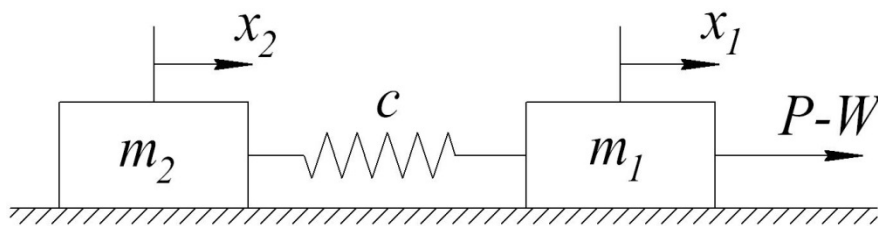


Рис. 1. Аналогова схема коливань вантажу

Систему рівнянь (4) можна звести [3] до одного диференціального рівняння для x -горизонтального переміщення вантажу відносно рухомої точки підвісу:

$$\ddot{x} + \omega^2 \cdot x = \frac{P - W}{m_1}, \quad (6)$$

де ω – частота власних маятникових коливань вантажу відносно крана:

$$\omega = \sqrt{\frac{(m_1 + m_2) \cdot g}{m_1 \cdot H}}. \quad (7)$$

Враховуючи ту обставину, що опір рухові крану (вантажного візка) створює сила тертя коліс з рейками, а також аеродинамічний опір вантажу на канаті, який розгойдується, приймаємо для W наступний закон:

$$W = W_0 \cdot \text{sign}(\dot{x}), \quad (8)$$

де W_0 – сила (амплітуда) тертя Кулона (“сухого тертя”).

Тоді у розгорнутому вигляді (6) із врахуванням (8) набуває виду:

$$\ddot{x} + \omega^2 \cdot x = \frac{P - W_0 \cdot \text{sign}(\dot{x})}{m_1}. \quad (9)$$

СЕКЦІЯ 1

«Інформаційно-технологічне суспільство в змісті сучасної освіти»
«Моделі розвитку технічних інновацій в змісті сучасної освіти»»



У процесі гальмування крану (вантажного візка), коли він рухається по інерції, а зусилля приводного двигуна механізму пересування дорівнює нулю ($P \equiv 0$), замість (9) матимемо:

$$\ddot{x} + \omega^2 \cdot x = -\frac{W_0}{m_1} \cdot \text{sign}(\dot{x}). \quad (10)$$

Отже, рівняння (10), отримане вище, співпадає з рівнянням, яке описує рух механічного осцилятора з сухим тертям [1, 2]:

$$\ddot{x} + \omega^2 \cdot x = -h \cdot \frac{\dot{x}}{|\dot{x}|}, \quad h = \frac{W_0}{m_1}, \quad (11)$$

де права частина дорівнює $\pm h$ в залежності від знаку \dot{x} .

Рівняння (11) належить до кусково-лінійних рівнянь другого порядку. В усьому розглядуваному діапазоні зміни змінних рівняння такого типу нелінійні [1], однак на окремих ділянках їх можна вважати лінійними. Тому розглядувану нелінійну задачу (11) можна звести до узгодженого розв'язку кількох лінійних рівнянь (методом припасовування отримуваних розв'язків) [2].

Приймаючи наступні початкові умови:

$$x|_{t=0} = A > \frac{k \cdot h}{\omega^2}, \quad \dot{x}|_{t=0} = 0 \Rightarrow \dot{x}_1|_{t=0} = \dot{x}_2|_{t=0}, \quad (12)$$

на окремих ділянках руху, які відповідають проміжкам часу $(n-1) \cdot \pi < \omega \cdot t < n \cdot \pi$ ($n = 1, 2, 3, \dots, \frac{k+1}{2}$), маємо розв'язки рівняння (11) у вигляді:

$$x_n = \left[A - \frac{(2 \cdot n - 1) \cdot h}{\omega^2} \right] \cdot \cos \omega \cdot t + (-1)^{n+1} \cdot \frac{h}{\omega^2}. \quad (13)$$

Тривалість коливань типу (13) продовжується протягом часу:

$$t_{\text{коливань}} = \frac{(k+1) \cdot \pi}{2 \cdot \omega}, \quad k = 2 \cdot n_{\text{max}} - 1. \quad (14)$$

Нижче, у таблиці 1 наведені значення $t_{\text{коливань}}$ для різних значень k , m_1 , m_2 , H , n_{max} , ω .

Таблиця 1

Значення $t_{\text{коливань}}$, с для різних m_1 , m_2 , $H(\omega)$, $n_{\text{max}}(k)$

H, m	$n_{\text{max}}(k)$	$m_1 = 10^4 \text{ кг}$			$m_1 = 2 \cdot 10^4 \text{ кг}$		
		$m_2 = 5 \cdot 10^4 \text{ кг}$	$m_2 = 10^5 \text{ кг}$	$m_2 = 2 \cdot 10^5 \text{ кг}$	$m_2 = 5 \cdot 10^4 \text{ кг}$	$m_2 = 10^5 \text{ кг}$	$m_2 = 2 \cdot 10^5 \text{ кг}$
10	2 (3)	$\frac{2,590}{2,426^*}$	$\frac{1,913}{3,285}$	$\frac{1,384}{4,539}$	$\frac{3,391}{1,853}$	$\frac{2,590}{2,426}$	$\frac{1,384}{4,539}$
	3 (5)	$\frac{3,885}{2,426}$	$\frac{2,869}{3,285}$	$\frac{2,076}{4,539}$	$\frac{5,086}{1,853}$	$\frac{3,885}{2,426}$	$\frac{2,076}{4,539}$
15	2 (3)	$\frac{3,172}{1,981}$	$\frac{2,343}{2,682}$	$\frac{1,695}{3,706}$	$\frac{4,153}{1,513}$	$\frac{3,172}{1,981}$	$\frac{1,695}{3,706}$
	3 (5)	$\frac{4,758}{1,981}$	$\frac{3,514}{2,682}$	$\frac{2,543}{3,706}$	$\frac{6,229}{1,513}$	$\frac{4,758}{1,981}$	$\frac{2,543}{3,706}$



**Матеріали Міжнародної науково-практичної конференції
професорсько-викладацького складу, науковців, аспірантів і студентів
«Роль інститутів освіти та науки у формуванні інноваційної культури суспільства»**

20	2 (3)	$\frac{3,662}{1,716}$	$\frac{2,705}{2,323}$	$\frac{1,958}{3,209}$	$\frac{4,796}{1,310}$	$\frac{3,662}{1,716}$	$\frac{1,958}{3,209}$
	3 (5)	$\frac{5,492}{1,716}$	$\frac{4,057}{2,323}$	$\frac{2,937}{3,209}$	$\frac{7,194}{1,310}$	$\frac{5,492}{1,716}$	$\frac{2,937}{3,209}$
	4 (7)	$\frac{7,323}{1,716}$	$\frac{5,410}{2,323}$	$\frac{3,916}{3,209}$	$\frac{9,593}{1,310}$	$\frac{7,323}{1,716}$	$\frac{3,916}{3,209}$

*Примітка. Поряд зі значенням $t_{\text{коливань}}, c$ подане значення $\omega, c^{-1}: \frac{t_{\text{коливань}} \cdot c}{\omega, c^{-1}}$.

Визначимо амплітуду A коливань вантажу, що описується диференціальним рівнянням (11) з наступних міркувань. Величина W_0 є, по суті, силою сухого тертя і визначається за формулою:

$$W_0 = \alpha \cdot (m_1 + m_2) \cdot g, \quad (15)$$

де α – коефіцієнт тертя коліс вантажного візка з рейками.

Тоді для амплітуди A матимемо:

$$A = \frac{k \cdot h}{\omega^2} = \frac{k \cdot W_0}{m_1 \cdot \omega^2} = \frac{k \cdot \alpha \cdot (m_1 + m_2) \cdot g}{m_1 \cdot \omega^2} = k \cdot \alpha \cdot H. \quad (16)$$

Слід зазначити, що відношення $\frac{A}{H}$ визначає синус кута відхилення вантажу на канаті від вертикалі φ (із врахуванням рухомої точки підвісу):

$$\sin \varphi_0 = \frac{A}{H} \rightarrow \varphi_0 = \arcsin(k \cdot \alpha). \quad (17)$$

Нижче, у таблиці 2 наведені результати розрахунків φ та A для різних значень α , k та H .

Таблиця 2

Значення кута φ_0 , град та A , м від α , k та H , м

α	k	φ_0 , град	A , м		
			$H = 10 \text{ м}$	$H = 15 \text{ м}$	$H = 20 \text{ м}$
0,01	3	1,72	0,3	0,45	0,6
	5	2,87	0,5	0,75	1,0
	7	4,01	0,7	1,05	1,4
0,02	3	3,44	0,6	0,9	1,2
	5	5,74	1,0	1,5	2,0
	7	8,05	1,4	2,1	2,8
0,03	3	5,16	0,9	1,35	1,8
	5	8,63	1,5	2,25	3,0
	7	12,12	2,1	3,15	4,2

Враховуючи (17) і ту обставину, що $\ddot{\varphi} = \frac{\ddot{x}}{H}$, $\cos \varphi \approx 1,0$, $\sin \varphi \approx \varphi \approx \frac{x}{H}$, можна подати рівняння вільних (без тертя і затухання) коливань розглядуваної системи у вигляді рівняння руху неврівноваженого тіла, що обертається навколо горизонтальної вісі, і має вид:

$$\ddot{\varphi} + \omega^2 \cdot \sin \varphi = 0. \quad (18)$$

Саме такий підхід дозволяє уточнити значення A (16).

Введемо позначення:



$$P_0 = m_2 \cdot g \cdot H \cdot (1 - \cos \varphi_0). \quad (19)$$

Маятник (18) має стійке положення рівноваги ($\varphi = 0$).

Нехай значення $P_0 < 2 \cdot m_2 \cdot g \cdot H$, тоді існують м'які анізохронні лібрації [1], для яких рівняння скелетної кривої і вираз для кутового напіввзмаху (A_φ) мають вид:

$$\Omega = \frac{\pi}{2} \cdot \omega \cdot K^{-1} \cdot \left(\sqrt{\frac{P_0}{2 \cdot m_2 \cdot g \cdot H}} \right); \quad A_\varphi = 2 \cdot \arcsin \left(\sqrt{\frac{P_0}{2 \cdot m_2 \cdot g \cdot H}} \right). \quad (20)$$

Тоді точне значення A можна знайти зі співвідношення:

$$A = A_\varphi \cdot H = 2 \cdot H \cdot \arcsin \left(\sqrt{\frac{P_0}{2 \cdot m_2 \cdot g \cdot H}} \right) = 2 \cdot H \cdot \arcsin \left(\sqrt{\frac{1 - \cos \varphi_0}{2}} \right). \quad (21)$$

У таблиці 3 подані значення A для різних значень H та φ_0 , які обчислені за формулами (21).

Таблиця 3

Значення $A, м$ для різних значень H та φ_0

$\varphi_0, \text{град}$		2	4	6	8	10	12
$A, м$	$H = 10 м$	0,349	0,698	1,047	1,396	1,743	2,091
	$H = 15 м$	0,524	1,047	1,571	2,093	2,615	3,137
	$H = 20 м$	0,698	1,396	2,094	2,792	3,486	4,182

Висновки.

1. У межах моделі механічного осцилятора з сухим тертям проведений кінематично-силовий аналіз маятникових коливань вантажу при гальмуванні мостових кранів.

2. Визначені закон руху вантажу на канаті, частота маятникових коливань в залежності від основних параметрів системи (мас вантажу та вантажного візка, довжини канату), а також тривалість у часі процесу затухання вказаних коливань, викликаного наявною у системі силою сухого (кулонового) тертя.

3. Отримані у даній роботі результати можуть бути у подальшому використані для уточнення та вдосконалення існуючих інженерних методів розрахунку навантажень, що виникають у мостових кранах при їх гальмуванні, за наявних маятникових коливань вантажу, як на стадіях проектування/конструювання таких кранових систем, так і у режимах реальної експлуатації.

Список літератури

1. *Вибрації в техніке: Справочник.* В 6-ти т. – М.: Машиностроение, 1979. – Т. 2. Колебания нелинейных механических систем. / Под ред. И.И. Блех-мана. – 1979. – 351 с.
2. *Каннингхем В.* Введение в теорию нелинейных систем / В. Каннинг-хем. – М.-Л.: Госэнергоиздат, 1962. – 456 с.
3. *Лобов Н.А.* Динамика грузоподъёмных кранов. / Н.А. Лобов. – М.: Машиностроение, 1987. – 160 с.

Аннотація. Проведен кінематически-силової аналіз маятникових коливань груза при торможении мостовых кранов. Для установления закона движения и его кинематических характеристик, определения силы натяжения канатов (его



**Матеріали Міжнародної науково-практичної конференції
професорсько-викладацького складу, науковців, аспірантів і студентів
«Роль інститутів освіти та науки у формуванні інноваційної культури суспільства»**

горизонтальной составляющей) использована известная в литературе модель механического осциллятора с сухим трением.

Ключевые слова: модель, механический осциллятор, сухое трение, кинематически-силовой анализ, маятниковые колебания, груз, торможение, краны.

Annotation. The kinematic power analysis of the load's pendular oscillations in slow downing overhead cranes is performed. In order to define the law of motion and its kinematic characteristics, as well as the ropes stretching force (it's horizontal component), the model of mechanic oscillator with the dry friction as known in the specialized literature is used.

Key words: model, mechanical oscillator, dry friction, kinematic power analysis, pendular oscillations, load, slow downing, cranes.

**THE MODEL OF MECHANICAL OSCILLATOR WITH THE DRY FRICTION IN THE
KINEMATIC POWER ANALYSIS OF THE LOAD'S PENDULAR OSCILLATIONS IN
SLOW DOWNING OF CRANES**

V.S. Loveykin¹, Y.V. Chovnyuk¹, M.H. Dykteruk², K.I. Pochka²