

**ЛИТВИНОВ О.І.**  
**ДО МЕТОДОЛОГІЇ ДОСЛІДЖЕННЯ ЕЛЕКТРОМЕХАНІЧНИХ СИСТЕМ**

---

УДК 531/ 534(075.8)

**Литвинов О.І.,**  
канд. техн. наук, професор,  
ВП НУБіП України «Ніжинський агротехнічний інститут»

**ДО МЕТОДОЛОГІЇ ДОСЛІДЖЕННЯ  
ЕЛЕКТРОМЕХАНІЧНИХ СИСТЕМ**

***Анотація.** В роботі підкреслюється єдність різних форм руху матерії і висвітлюються методи дослідження руху електромеханічних систем, які базуються на працях Лагранжа, Максвелла, Ляпунова. Наведені електромеханічні аналогії і приклади дослідження систем сільськогосподарського призначення.*

**Вступ.** Історія наукових досліджень постійно нагадує про єдність законів природи, про збереження енергії різноманітних форм руху матерії – механічної, електричної, теплової, хімічної та ін. Проте, не лише закон збереження, а й теорема про зміну повної механічної енергії – це окремі випадки загального закону збереження і еквівалентного перетворення матерії і енергії, відкритого М.В. Ломоносовим. Якщо, приміром, робота не потенціальних сил додатна, то відбувається прилив механічної енергії внаслідок відповідного зменшення енергії інших немеханічних форм (теплової, електричної). Якщо ця робота від’ємна, то відбувається розсіювання (дисипація) механічної енергії, яка переходить в енергії інших видів.

У свою чергу, всі закономірності, що характеризують процеси перетворення і збереження матерії і руху в різних формах, є конкретними проявами загального закону збереження матерії і руху, який має величезне наукове і методологічне значення, оскільки є природничонауковою основою матеріалізму. Стверджуючи, що матерія і рух не створюються і не знищуються, що матерія, яка рухається, здатна до різних перетворень, і розглядаючи матерію в органічному зв’язку з рухом, загальний закон збереження матерії і руху є доказом єдності світу і загальності руху. Закон збереження матерії і руху в усіх своїх конкретних проявах є теоретичною основою різних досліджень у природознавстві і техніці, пов’язаних з перетворенням матерії і руху з однієї форми в іншу. В цьому може бути і причина того, що спостерігається дивовижна схожість диференціальних рівнянь, які описують явища різної фізичної природи.

**Аналіз фізичних аналогій.** Велика роль теоретичної механіки як фундаментальної науки в дослідженнях процесів різної фізичної природи. Методи аналітичної механіки є універсальними та ефективними при розв’язанні багатьох задач електротехніки, починаючи зі складання контурних рівнянь електричних кіл і завершуючи моделюванням процесів на аналогових обчислювальних комплексах.

В науці розрізняють три фізичні концепції світу: механічну, електродинамічну і квантово-польову, відповідно до яких і виникли три основних теорії: механіка Ньютона, електродинаміка Максвелла і теорія відносності Ейнштейна. Але аналітична механіка є наукою, яка своїми методами наскрізь пронизує всі три картини світу.

Багато точних законів фізики можуть слугувати підтвердженням аналогічності рівнянь і виразів. Наприклад, структура всім відомих другого закону Ньютона, закону Гука і закону Ома є ідентичною:

$$m\ddot{a} = \vec{F}; \quad cx = F; \quad Ri = U.$$

Спільним у цих виразах є те, що в них входять лише три величини, кожна з яких

## Новітні тенденції використання технологій та техніки для виробництва продукції АПК

---

визначається і є незалежною.

Другий приклад. Візьмемо закон гравітації, відкритий Ньютоном, закон про взаємодію двох електричних зарядів, відкритий Кулоном, і закон взаємодії для магнітних полів.

Закон всесвітнього притягання

$$F = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2},$$

де  $m_1, m_2$  – маси взаємодіючих тіл,  $\gamma$  – гравітаційна стала,  $r$  – відстань між тілами.

Аналогічний закон для електричних зарядів

$$F = \varepsilon \frac{q_1 q_2}{r^2},$$

де  $\varepsilon$  – відносна діелектрична проникність,  $q_1, q_2$  – взаємодіючі електричні заряди,  $r$  – відстань між зарядами.

Закон взаємодії магнітних полів

$$F = \mu \frac{B_1 B_2}{r^2},$$

де  $\mu$  – магнітна проникність,  $B_1, B_2$  – магнітна індукція,  $r$  – відстань між джерелами магнітного поля.

Як легко побачити, структура алгебраїчних виразів цих законів повністю аналогічні, але фізична природа цих взаємодій є абсолютно різною.

Розглянемо приклад коливань тягаря масою  $m$ , підвішеного на вертикальній пружині з коефіцієнтом жорсткості  $c$ . Диференціальне рівняння вільних коливань цього тягаря має відомий вигляд

$$m\ddot{x} + cx = 0,$$

де  $x$  – переміщення тягаря.

Кожному параметру механічної системи можна поставити у відповідність параметр електричної системи і навпаки. Наприклад, інерційні властивості тіл в механічній системі залежать від маси і моментів інерції. В електричних системах існують аналоги цих понять – індуктивність і ємність. Диференціальне рівняння коливань електричного контуру, що складається з котушки індуктивності  $L$  і конденсатора ємності  $C$ , має аналогічний вигляд, як і для коливань тягаря.

$$L\ddot{q} + \frac{1}{C}q = 0,$$

де  $q$  – заряд конденсатора.

При дослідженні механічних матеріальних систем найчастіше застосовують рівняння Лагранжа другого роду. На практиці часто зустрічаються електромеханічні системи, механічний рух яких визначається силами електромагнітної природи. Максвелл [1] у своїй праці про електрику і магнетизм застосував рівняння Лагранжа другого роду для дослідження системи, що містила механічні елементи і провідники зі струмом.

Центральним рівнянням аналітичної механіки є рівняння Лагранжа другого роду, в якому базовою величиною є енергія кінетична і потенціальна. Ці рівняння слугують основою для перенесення методів аналітичної механіки на електродинаміку у формі рівнянь Лагранжа – Максвелла, де замість кінетичної і потенціальної енергії оперують енергією електричного і магнітного полів.

**ЛИТВИНОВ О.І.**  
**ДО МЕТОДОЛОГІЇ ДОСЛІДЖЕННЯ ЕЛЕКТРОМЕХАНІЧНИХ СИСТЕМ**

---

Таким чином, аналітична механіка є єдиною наукою, яка дає спільний апарат – рівняння Лагранжа-Максвелла для складання диференціальних рівнянь електромеханічних систем, які є основою сучасної техніки, бо сьогодні важко уявити прилад чи машину, де б були тільки механічні елементи.

**Дослідження динаміки комбайнів. Обґрунтування динамічної моделі.** В роботі поставлена задача провести динамічні дослідження механічних систем механізмів приводу, силових ліній складних машин типа причіпних комбайнів, наприклад, кукурудзозбиральних, кормозбиральних, бурякозбиральних, привод яких здійснюється від валу відбору потужності трактора через кардан до центрального редуктора комбайна, а потім розгалужується до різних робочих органів.

Трансмісія таких комбінованих машин є складною згинально-крутильною динамічною системою з великим числом розподілених і зосереджених мас, з'єднаних елементами, які мають певні пружно-інерційні характеристики. Вивчення таких систем пов'язано з великими труднощами математичного характеру. Проте, практичні задачі динамічного дослідження допускають можливості значного спрощення еквівалентних моделей.

Не викривляючи основних закономірностей дійсних динамічних процесів, можна замінити реальний механізм його еквівалентною моделлю, яка складена із абсолютно жорстких дискретних мас і без інерційних пружних елементів, і представити реальну систему з великим числом ступенів вільності динамічно еквівалентною спрощеною схемою з кінцевим числом ступенів вільності.

Порядок перетворення реальної матеріальної системи і отримання динамічних характеристик елементів моделі наступний. Перш за все, визначаються моменти інерції мас і крутильні піддатливості всіх конструктивних елементів комбайнів, використовуючи розрахунково-експериментальні методи. Піддатливості визначаються в основному розрахунковим шляхом. В необхідних випадках враховується згинальна піддатливість валів и опор, яка зводиться до крутильної.

В результаті проведених операцій отримується складна схема с великим числом мас різного порядку мализни. Нехтуючи масами, які на порядок менші, об'єднуючи ті, жорсткість в'язів між якими на порядок вище інших, і зводячи систему до головного валу, виходячи з умови рівності кінетичної і потенціальної енергії, отримаємо систему с 8-10 ступенями вільності, ще досить складну для розрахунків. Подальше зменшення числа ступенів вільності проводиться з урахуванням збереження частот низьких тонів коливань, які, як показують експериментальні дослідження, є домінуючими при формуванні динамічних навантажень.

В результаті проведення перелічених операцій складну матеріальну систему комбайнів можна звести до більш простої тримасової розгалуженої крутильно-коливальної системи із збереженням двох перших форм коливань (рис.1).

Приймемо такі позначення:

$I_1, I_2, I_3$  – зведені до головного валу моменти інерції енергетичного засобу і двох основних мас комбайна;

$C_1, C_2, C_3$  – зведені до головного валу жорсткості еквівалентних валів;

$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_0$  – кути повороту мас і центра розгалуження;

$M_1, M_2, M_3$  – зведені до головного валу моменти зовнішніх сил.

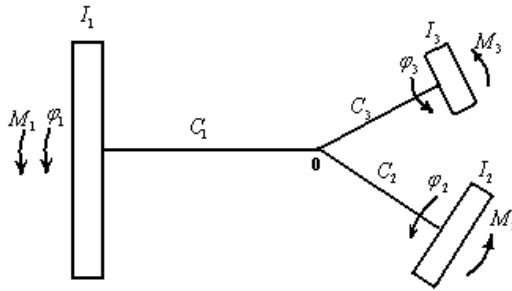


Рис. 1. Еквівалентна схема трансмісії комбайна

Прийнято, що момент двигуна змінюється в функції кутової швидкості (характеристика знята експериментально):

$$M_1 = M_n \frac{\omega_0 - \omega_1}{\omega_0 - \omega_n}, \quad (1)$$

де  $M_n$  – зведений номінальний момент,  $\omega_0, \omega_n$  – кутові швидкості холостого ходу і номінальна.

**Формалізація моделі. Загальний розв’язок диференціальних рівнянь руху.** Вихідна система диференціальних рівнянь, яка складена методом Лагранжа в другій формі, має вигляд:

$$\begin{aligned} I_1 \ddot{\varphi}_1 + C_1(\varphi_1 - \varphi_0) &= M_1, \\ I_2 \ddot{\varphi}_2 + C_2(\varphi_2 - \varphi_0) &= M_2, \\ I_3 \ddot{\varphi}_3 + C_3(\varphi_3 - \varphi_0) &= M_3. \end{aligned} \quad (2)$$

Враховуючи, що відносні кутові переміщення мас  $\varphi_1 - \varphi_0$ , або деформації в’язей пропорційні відповідним силам пружності  $M_{10}, \dots$ ,

$$(\varphi_1 - \varphi_0)C_1 = M_{10},$$

і виражаючи кутові переміщення  $\varphi_2$  і  $\varphi_3$  та їхні другі похідні через  $\varphi_1$ , а також приймаючи до уваги умови зчленування моментів сил пружності в центрі розгалуження, отримаємо систему диференціальних рівнянь в нових узагальнених координатах – моментах пружності на відповідних валах, доцільність застосування яких ретельно обґрунтована в роботах проф. С.М. Кожевнікова [2].

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_1 + \frac{\Gamma}{I_1} \omega_1 + \frac{M_{10}}{I_1} &= \frac{\Gamma}{I_1} \omega_0, \\ \dot{\omega}_1 - \frac{\dot{M}_{10}}{C_1} + \frac{\dot{M}_{20}}{C_2} + \frac{M_{20}}{I_2} &= \frac{M_2}{I_2}, \\ \dot{\omega}_1 - \frac{\dot{M}_{10}}{C_1} + \frac{\dot{M}_{30}}{C_3} + \frac{M_{30}}{I_3} &= \frac{M_3}{I_3}, \\ M_{10} + M_{20} + M_{30} &= 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Отримана система диференціальних рівнянь (3), яка встановлює залежність між моментами сил пружності на окремих ділянках зведеної системи, описує поведінку машинного агрегату при дослідженні динамічних процесів. Загальний розв’язок однорідних рівнянь будемо шукати у вигляді  $A_j e^{\lambda t}$ , де  $\lambda$  – ряд характеристичних чисел,

при яких рівняння перетворюються у тотожність,  $A_j$  – сталі інтегрування, що визначаються початковим станом системи.

Підставляючи прийнятий розв'язок в систему (3), в якій праві частини покладені рівними нулю, прирівнюючи нулю и розкриваючи детермінант, складений із коефіцієнтів при шуканих сталих  $A_j$ , отримаємо характеристичне рівняння п'ятого порядку, корені якого визначають власні частоти коливань системи

$$\left[ \frac{\lambda}{I_1} + \frac{\lambda^2}{C_1} \left( \lambda + \frac{\Gamma}{I_1} \right) \right] \left[ \left( \frac{\lambda^2}{C_2} + \frac{1}{I_2} \right) + \left( \frac{\lambda}{C_3} + \frac{1}{I_3} \right) \right] + \left( \frac{\lambda^2}{C_2} + \frac{1}{I_2} \right) \left( \frac{\lambda^2}{C_3} + \frac{1}{I_3} \right) \left( \lambda + \frac{\Gamma}{I_1} \right) = 0. \quad (4)$$

Аналіз характеристичного рівняння для більш простих, в т.ч. і граничних випадків, дозволив встановити границі стійкості розв'язку системи, а також чисельно розв'язати його з подальшим уточненням коренів за методом ітерацій І. Ньютона, оцінити вплив дисипації на величину останніх. Із п'яти отриманих коренів рівняння перший, що визначає розгін системи, є дійсним, а решта чотири – комплексні взаємо-спряжені, вони визначають форми коливань системи.

Прийнявши одну із амплітуд ( $A_1$ ) сталою і виразивши решту через неї, отримаємо передаточні коефіцієнти  $K_j^{(n)}(\lambda_n)$ . Загальний розв'язок системи однорідних диференціальних рівнянь уявимо у вигляді вектора [3]:

$$\vec{Y}_0(t) = \{\omega_1(t); M_{10}(t); M_{20}(t); M_{30}(t)\}. \quad (5)$$

Частинні розв'язки диференціальних рівнянь отримані з урахуванням правої частини, яка уявляє функції зовнішніх моментів. Приймаючи до уваги експериментальні діаграми сил, що формують зовнішні моменти в системі, враховуючи їхню реальну періодичність, уявляли зовнішнє навантаження у вигляді гармонічного ряду Фур'є. Приймаючи принцип суперпозиції для лінійних систем, знаходимо реакцію системи на кожен гармонічну складову, сумуючи отримані результати.

Частинні розв'язки можуть бути представлені у вигляді

$$\vec{Y}_0(t) = \begin{pmatrix} M_{10}(t) \\ M_{20}(t) \\ M_{30}(t) \\ \omega(t) \end{pmatrix} = M_2^0 e^{\lambda_2 t} \begin{pmatrix} K_1(\lambda_2) \\ K_2(\lambda_2) \\ K_3(\lambda_2) \\ K_\omega(\lambda_2) \end{pmatrix} + M_3^0 e^{\lambda_3 t} \begin{pmatrix} K_1(\lambda_3) \\ K_2(\lambda_3) \\ K_3(\lambda_3) \\ K_\omega(\lambda_3) \end{pmatrix}. \quad (6)$$

**Стійкість руху системи.** Стійкість руху механічної системи залежить від діючих сил і початкових умов руху (координат і швидкостей точок системи в момент початку руху).

Знаючи сили і початкові умови, можна теоретично розрахувати, як буде рухатись система. Рух, який відповідає розрахунку, називається незбуреним.

У зв'язку з деякою неточністю виміру початкових умов, їх дійсні значення, як правило, відрізняються від розрахункових. Крім того, механічна система під час руху може підпадати під випадкові впливи різних сил, що також еквівалентно змінює початкові умови. Відхилення початкових умов, що виникають із різних причин, називають початковими збуреннями, а рух, який система при цьому здійснює при наявності збурень – збуреним рухом.

**Задача про стійкість руху і рівняння збуреного руху.**

Припустимо, що рух об'єкта дослідження описаний нормальною у формі Коші системою диференціальних рівнянь

$$\frac{dy_k}{dt} = Y_k(t, y_1, y_2, \dots, y_n), \quad k=1, 2, \dots, n, \quad (7)$$

де  $y_k$  – деякі параметри, які пов'язані з рухом, наприклад, координати, проекції швидкостей, з початковими умовами при  $t = 0$ :

$$y_k(t_0) = y_{k0}, \quad k=1, 2, \dots, n. \quad (8)$$

Нехай деяким фіксованим початковим умовам (8) відповідає певний розв'язок системи (7):

$$y_k = f_k(t), \quad k=1, 2, \dots, n, \quad (9)$$

котрий описує заданий рух, але цей рух ми можемо і не знати за неможливістю інтегрування.

Розв'язок (9), який задовольняє початковим умовам (8) і описує заданий рух, називають незбуреним рухом системи.

Надамо далі початковим умовам  $y_{k0}$  деякі невеликі за модулем прирости  $\delta_k$ ,  $k=1,2,\dots,n$ , які називають початковими збуреннями. Нехай новим початковим значенням  $y_{k1} = y_{k0} + \delta_k$  відповідає новий частинний розв'язок системи (7)

$$y_k = \varphi_k(t), \quad k=1,2,\dots,n. \quad (10)$$

Розв'язок (10), який отриманий з урахуванням початкових збурень  $\delta_k$ , і відповідний йому рух системи називають збуреним рухом.

Виходячи із розв'язків (9) і (10), визначимо їх прирости:

$$\delta_{yk} = \varphi_k(t) - f_k(t) = u_k(t), \quad k=1,2,\dots,n, \quad (11)$$

які називають варіаціями параметрів руху.

Розглянемо рух в координатах  $u_1, u_2, \dots, u_n$ . Простір  $(u_1, u_2, \dots, u_n)$  в теорії стійкості називають фазовим простором, координати  $u_k$  – фазовими координатами, а їх сукупність, яка визначає деякий стан системи, що досліджується – фазою системи.

Будь-який незбурений рух зображується у системі координат  $(u_1, u_2, \dots, u_n)$  фіксованою точкою  $M_0(0, \dots, 0)$ , яка співпадає з початком координат (усі  $u_k \equiv 0$ ). Точка  $M_0$  називається точкою рівноваги системи.

Сукупність значень  $(u_1(t), \dots, u_n(t))$  в довільний момент часу  $t$  визначає відповідний фазовий стан або фазу системи. Геометрично зміна фазових координат визначає фазову траєкторію  $L_k$  зображувальної точки  $M_k$  в  $n$ -вимірному просторі  $u_k$  з початком у точці  $M_0$ , яка відповідає початку координат при незбуреному русі.

Виходячи з викладених міркувань, означимо стійкість руху за Ляпуновим [4].

Якщо довільно заданому додатному числу  $\varepsilon$ , яким малим воно б не було, можна поставити у відповідність друге додатне число  $\delta = \delta(\varepsilon)$ , таке, що при будь-яких початкових збуреннях

$$\delta_1 = u_1(t_0), \quad \delta_2 = u_2(t_0), \quad \dots, \quad \delta_n = u_n(t_0),$$

які задовольняють при  $t = t_0$  нерівностям

$$|u_1(t_0)| \leq \delta, |u_2(t_0)| \leq \delta, \dots, |u_n(t_0)| \leq \delta,$$

для всіх  $t = t_0$  виконуються нерівності

$$|u_1(t_0)| < \varepsilon, |u_2(t_0)| < \varepsilon, \dots, |u_n(t_0)| < \varepsilon,$$

то незбурений рух називається стійким.

У плоскому фазовому підпросторі  $(u_1, u_2)$  даному означенню можна дати геометричну інтерпретацію (рис. 2). Фазова траєкторія  $L_1$  точки  $M_1$  належить стійкому руху. Окрему групу стійких рухів утворюють асимптотично стійкі рухи, які можна визначити таким чином.

Якщо незбурений рух системи є стійким і при цьому будь-який збурений рух при достатньо малих початкових збуреннях прямує до незбуреного руху, тобто якщо

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n u_k^2(t) = 0, \quad (12)$$

то такий незбурений рух називається асимптотично стійким рухом (траєкторія  $L_3$  точки  $M_3$  на рис.2).

У виразі (12) за міру відхилень збуреного руху від незбуреного прийнята сума квадратів фазових координат  $u_k$ . Якщо параметри руху системи не задовольняють даним означенням, то такий рух є нестійким (фазова траєкторія  $L_2$  точки  $M_2$  на (рис.2).

Умови (12) з геометричної точки зору розуміють таким чином: при асимптотичній стійкості зображувальна точка  $M$  фазової траєкторії повинна, не виходячи за межі сфери радіуса  $\varepsilon$ , необмежено наближатись до початку координат  $O$  (лінія  $L_3$  точки  $M_3$  на рис. 2). Це означає, що фізична система, рух якої досліджується, намагається повернутися у свій вихідний зрівноважений стан.

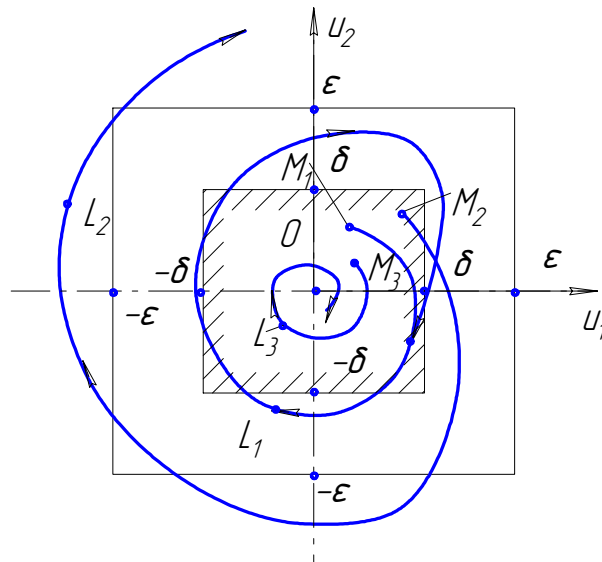


Рис. 2. Геометрична інтерпретація стійкості

**Диференціальні рівняння збуреного руху.**

Для дослідження збуреного руху у відповідності до його означення в системі фазових координат  $u_1, u_2, \dots, u_n$  доцільно диференціальні рівняння (7) звести до нових змінних  $\delta_{y_k}(t) = u_k(t)$ , де  $k = 1, \dots, n$ . Підставивши у рівняння (7) параметри збуреного руху  $\varphi_k = f_k + u_k$ , дістанемо нову систему рівнянь:

$$\begin{aligned} \dot{u}_k &= Y_k(t, \varphi_1, \dots, \varphi_n) - Y_k(t, f_1, \dots, f_n) = \\ &= Y_k(t, f_1 + u_1, \dots, f_n + u_n) - Y_k(t, f_1, \dots, f_n) = \\ &= U_k(t, u_1, \dots, u_n), \quad k = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (13)$$

Рівняння (13) в теорії стійкості руху називають диференціальними рівняннями збуреного руху. Кожному збуреному руху досліджуваного об'єкту відповідає деякий частинний розв'язок системи (13). Відомо, що будь-якому незбуреному руху відповідають нульові значення фазових координат  $u_k(t)$ , тобто тривіальний розв'язок  $u_1 = u_2 = \dots = u_n = 0$  системи (13), який вона повинна мати. Для цього необхідно, щоб функції  $U_k(t, u_1, \dots, u_n)$  перетворювались в нуль при  $u_1 = u_2 = \dots = u_n = 0$ .

Таким чином, дослідження на стійкість будь-якого незбуреного руху можна звести до дослідження на стійкість тривіального розв'язку системи (13). Фізичний сенс системи (13) полягає у тому, що вона визначає вектор швидкості руху зображувальної точки  $M$  вздовж фазової траєкторії  $L$ :

$$\bar{u}_M = \{u_1, u_2, \dots, u_n\} = \{U_1, U_2, \dots, U_n\}.$$

Рівності  $U_k = U_k(t)$  можна розглядати, як параметричні рівняння руху точки.

Проте, у багатьох випадках праві частини рівнянь збуреного руху не залежать явно від часу:

$$\dot{u}_k = U_k(u_1, \dots, u_n), \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (14)$$

Система (14) називається стаціонарною або автономною, а її рух – усталеним. Ці системи в подальшому і розглядаються. Припускаючи, що праві частини рівнянь (14) розкладаються в ряд Тейлора (Маклорена) по степенях  $u_k(t)$ , запишемо:

$$\dot{u}_k = p_{k1}u_1 + p_{k2}u_2 + \dots + p_{kn}u_n + U_k^*(t, u_1, \dots, u_n), \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (15)$$

де коефіцієнти  $p_{ki} = p_{ki}(t) = \left( \frac{\partial U_k}{\partial u_j} \right)_0$  у загальному випадку є функціями часу  $t$  (для автономних систем – сталі величини);

$U_k^*$  – сукупність всіх членів розкладання вищих порядків мализни (починаючи з другого) відносно  $U_k$ . Нехтуючи в рівняннях (15) членами вищих порядків, отримаємо лінійну однорідну систему

$$\dot{u}_k = p_{k1}u_1 + p_{k2}u_2 + \dots + p_{kn}u_n, \quad k = 1, \dots, n. \quad (16)$$

**Приклад 1.** Складемо диференціальне рівняння збуреного руху симетричної причіпної сільськогосподарської машини масою  $m$ , яка рухається зі сталою поступальною швидкістю  $v_0$  під дією сили сумарного опору  $\bar{R}$ , вектор якої проходить



вздовж осі симетрії і прикладений у центрі ваги  $O$ . Сила  $\bar{R}$  збігається з напрямом сили тяги трактора  $\bar{P}$ , що прикладена в точці причепа  $D(x_1, y_1)$  (рис. 3). Момент інерції машини відносно центра ваги дорівнює  $I_o$ .

Внаслідок випадкових бокових сил сумарний опір  $\bar{R}$  машини змістився, виникла пара сил, під дією якої агрегат повертається проти годинникової стрілки. Частково пара компенсується реактивною парою  $(\bar{F}, -\bar{F})$ , що виникає від бокового опору коліс і робочих органів.

Машина перебуває під дією сумарного збуреного моменту:

$$M = R \cdot r - F \cdot l, \quad (a)$$

де  $r$  – зміщення сили  $\bar{R}$  від лінії симетрії;  $l$  – плече реактивної пари  $\bar{F}, -\bar{F}$ .

Обмежуючись малим кутом  $\theta$ , який приймемо за узагальнену координату, будемо вважати

$$F = R \operatorname{tg} \theta \approx R \theta.$$

Тому рівняння (a) буде мати вигляд:

$$M = R(r - l\theta). \quad (б)$$

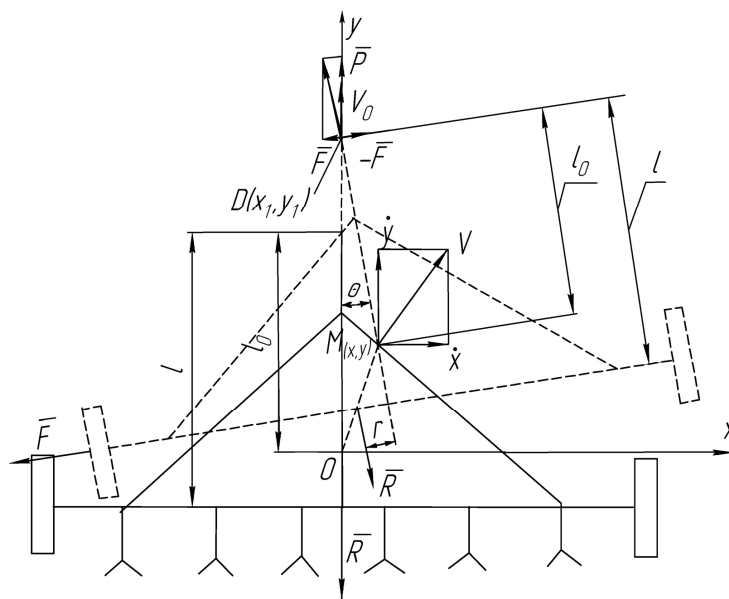


Рис. 3. Розрахунково-силова схема причіпної машини

Запишемо рівняння в'язі, як відстань, що завжди зберігається між точкою причепа  $D(x_1, y_1)$  і центром ваги  $M(x, y)$ ,  $l_0$  - відстань між вказаними точками:

$$(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 = l_0^2. \quad (в)$$

Оскільки  $x_1 = 0$ ,  $y_1 = v_0 t + l$ , то рівняння (в) зміниться:

$$x^2 + (v_0 t + l_0 - y)^2 = l_0^2. \quad (г)$$

Декартові координати центра ваги через узагальнену координату  $\theta$  дорівнюють:

$$\begin{aligned}x &= l_0 \sin \theta, \\y &= v_0 t + l_0(1 - \cos \theta).\end{aligned}\quad (д)$$

Взявши похідну за часом від виразу (д), маємо:

$$\dot{x} = l_0 \dot{\theta} \cos \theta; \quad \dot{y} = v_0 + l_0 \dot{\theta} \sin \theta. \quad (е)$$

Машина є системою з одним ступенем вільності, тому рівняння Лагранжа можна записати так:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \theta} = Q_\theta, \quad (ж)$$

де  $T$  – кінетична енергія машини,  $Q_\theta$  – узагальнена сила,  $\dot{\theta}$  – узагальнена швидкість.

Визначимо кінетичну енергію машини:

$$T = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} I_0 \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2} I_0 \dot{\theta}^2. \quad (з)$$

Підставляючи в (з) вираз (е), маємо:

$$T = \frac{1}{2} m (l_0^2 \dot{\theta}^2 + v_0^2 + 2v_0 l_0 \dot{\theta} \sin \theta) + \frac{1}{2} I_0 \dot{\theta}^2. \quad (к)$$

Знайдемо частинні похідні з виразу (к):

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = (m l_0^2 + I_0) \dot{\theta} + m v_0 l_0 \sin \theta; \quad \frac{\partial T}{\partial \theta} = m v_0 l_0 \cos \theta \cdot \dot{\theta}.$$

Для визначення узагальної сили  $Q_\theta$  запишемо вираз елементарної роботи прикладених сил на можливих переміщеннях точок системи:

$$\delta A = M \delta \theta = R(r - l \theta) \delta \theta, \quad \text{звідки } Q_\theta = R(r - l \theta).$$

Підставляючи у вираз (ж) всі знайдені величини, маємо:

$$\begin{aligned}(m l_0^2 + I_0) \ddot{\theta} &= R(r - l \theta), \\ \ddot{\theta} + \lambda^2 \theta &= \lambda^2 k,\end{aligned}\quad (и)$$

де  $\lambda = \sqrt{\frac{Rl}{m l_0^2 + I_0}}$ ;  $k = \frac{r}{l}$ .

Рівняння (и) і є диференціальним рівнянням збуреного руху причіпної машини.

#### **Рівняння Лагранжа-Максвелла**

У працях Максвелла Дж. К.: Maxwell/ A Treatise on Electricity and magnetism. 1873, (переклад «Избранные сочинения по теории электромагнитного поля». М.: Гостехиздат, 1952) вперше були застосовані рівняння Лагранжа другого роду для дослідження системи, що містила механічні елементи і провідники зі струмом, які можуть створювати декілька індуктивно і кондуктивно зв'язаних контурів, між тілами яких є сили, обумовлені як механічною так і електромагнітною взаємодією.

Отже, для дослідження механізмів з електроприводом, як електромеханічних

систем, найбільш зручними є рівняння Лагранжа-Максвелла, які мають форму рівнянь Лагранжа другого роду і дозволяють автоматично отримати не тільки рівняння руху механічної частини системи, але і зв'язані з ними рівняння електричної частини.

Складання цих рівнянь передбачає, що стан електромеханічної системи описується узагальненими координатами механічної частини, кількість яких у голономних системах дорівнює числу ступенів вільності механізму, і узагальненими координатами електричної частини, які визначають стан електричної частини системи.

Узагальнені механічні координати позначимо  $q_i (q_1, q_2, \dots, q_n)$ , де число  $n$  дорівнює кількості ступенів вільності механізму. За узагальнені механічні координати вибираємо лінійні або кутові параметри ланок.

Узагальнені електричні координати позначимо  $g_k (g_1, g_2, \dots, g_m)$ , де число  $m$  дорівнює кількості електричних ступенів вільності. За узагальнені електричні координати вибираємо кількості електрики (заряди).

Похідні за часом від узагальнених механічних координат уявляють узагальнені швидкості  $\dot{q}_i$ , а похідні за часом від узагальнених електричних уявляють узагальнені струми  $\dot{g}_k$ .

Рівняння Лагранжа-Максвелла для електромеханічних систем мають вигляд

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (17)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{g}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial g_k} = Q_k, \quad k = 1, 2, \dots, m. \quad (18)$$

У цих рівняннях літера  $L$  є функцією Лагранжа-Максвелла, яка дорівнює сумі «електричної» функції Лагранжа  $L_E$  і «механічної» функції Лагранжа  $L_M$ :

$$L = L_E + L_M. \quad (19)$$

«Механічна» функція Лагранжа, як відомо, рівна різниці кінетичної  $T$  і потенціальної енергії  $\Pi$  механічної системи

$$L_M = T - \Pi. \quad (20)$$

«Електрична» функція Лагранжа для механізмів з електроприводом співпадає з магнітною енергією системи

$$L_E = \frac{1}{2} \sum_{r,s=1}^{\infty} L_{rs} i_r i_s, \quad (21)$$

де  $r$  та  $s$  – кількість незалежних електричних контурів (витків, обмоток), по яких протікають струми  $i_r$  та  $i_s$ ;  $L_{rs}$  при  $r \neq s$  – взаємна індуктивність (коефіцієнт взаємодукації), а при  $r = s$  – індуктивність (коефіцієнт самоіндукації).

Узагальнена або зведена сила  $Q_i$  визначається, як скалярна величина, рівна коефіцієнту при варіації цієї узагальненої координати у виразі елементарної роботи сил.

Узагальнена «сила»  $Q_k$  визначається за аналогією з  $Q_i$ , як скалярна величина, рівна коефіцієнту при варіації цієї «електричної» узагальненої координати у виразі елементарної роботи електричних сил

$$\delta A = \sum_{k=1}^m (E_{r,s} - R_{r,s} i_{r,s}) \delta g_k, \quad (22)$$

де  $E_{r,s}$  – електрична рухаюча сила контуру,

$R_{r,s}$  – електричний опір контуру.

**Приклад 2.** Електромагнітний прилад складається із рухомої котушки певної маси, що обертається у сталому магнітному полі, який утворює інша нерухома котушка, що складають одна з однієї послідовний електричний ланцюг.

На рухому котушку діє пара сил з боку пружини з коефіцієнтом жорсткості  $c$ . В обертальній парі рухомої котушки має місце в'язке тертя з коефіцієнтом опору  $\beta$ .

За узагальнені координати системи приймаємо кут повороту рухомої котушки  $\varphi$  та струм  $i$ , що протікає крізь обмотки котушок. Тоді «механічна» функція Лагранжа приймає вигляд

$$L_M = \frac{1}{2}(J\dot{\varphi}^2 - c\varphi^2),$$

де  $J$  – момент інерції рухомої котушки відносно осі обертання.

«Електрична» функція Лагранжа має вигляд

$$L_E = \frac{1}{2}(L_1 + L_{12} + L_2)i^2,$$

де індекс 1 стосується рухомої котушки, а індекс 2 – нерухомої.

За умови симетрії взаємна індуктивність  $L_{12} = L_{21}$ . Позначимо їх суму (повний коефіцієнт взаємної індуктивності) через  $2M$  і приймемо до уваги, що цей коефіцієнт залежить від взаємного розміщення котушок, тобто від кута повороту рухомої котушки  $\varphi$ . Звичайно приймають

$$M = M_o \sin \varphi,$$

де кут повороту  $\varphi$  відраховується від положення, при якому котушки перпендикулярні. Індуктивність котушок  $L_1, L_2$  вважаємо сталими величинами.

Таким чином, остаточно функція Лагранжа-Максвелла має вигляд

$$L = \frac{1}{2}[(L_1 + L_2 + 2M_o \sin \varphi)i^2 + J\dot{\varphi}^2 - c\varphi^2].$$

Узагальнена сила  $Q_i$  знаходиться із виразу елементарної роботи сил тертя на можливому переміщенні системи (робота сил пружності пружини врахована при складанні виразу потенціальної енергії):

$$\delta A = -\beta\dot{\varphi}\delta\varphi \Rightarrow Q_i = -\beta\dot{\varphi}.$$

Узагальнена сила  $Q_k$  знаходиться із виразу елементарної роботи «електричних сил»

$$\delta A = (E - iR)\delta i \Rightarrow Q_k = E - iR,$$

де  $R$  – сумарний опір обмоток котушок,

$E$  – зовнішня електрична рушійна сила.

Рівняння Лагранжа-Максвелла:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = -\beta \dot{\varphi},$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{i}} \right) = E - iR.$$

Визначимо похідні від функції Лагранжа-Максвелла

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = J\dot{\varphi}; \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \right) = J\ddot{\varphi}; \quad \frac{\partial L}{\partial \varphi} = M_o i^2 \cos \varphi - c \varphi;$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{i}} = (L_1 + L_2 + 2M_o \sin \varphi) \dot{i};$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{i}} \right) = (L_1 + L_2 + 2M_o \sin \varphi) \frac{di}{dt} + 2M_o i \dot{\varphi} \cos \varphi.$$

Підставимо в останні рівняння значення похідних. У підсумку отримаємо остаточно рівняння Лагранжа-Максвелла

$$J\ddot{\varphi} - M_o i^2 \cos \varphi + c \varphi = -\beta \dot{\varphi},$$

$$(L_1 + L_2 + 2M_o \sin \varphi) \frac{di}{dt} + 2M_o i \dot{\varphi} \cos \varphi = E - iR.$$

Сумісне розв'язання цих двох рівнянь дозволяє отримати шукані функції зміни узагальнених координат за часом

$$\varphi = \varphi(t); \quad i = i(t).$$

**Приклад 3.** За допомогою електродвигуна сталого струму з незалежним збудженням і параметрами:  $J_{зб}$  – зведений момент інерції;  $M_{зб}$  – зведений момент сил (задані параметри є функціями кута повороту ротора електродвигуна) рухається вхідна ланка механізму.

Скласти рівняння Лагранжа-Максвелла для заданої електромеханічної системи.

Позначимо індуктивності обмоток збудження і якоря літерами  $L_з, L_я$ , взаємну індуктивність через  $L_зя, L_яз = M$ , струми в обмотках збудження і якоря, відповідно, через  $i_з, i_я$ . Тоді функція Лагранжа-Максвелла отримує вигляд:

$$L = \frac{1}{2} (L_з i_з^2 + L_я i_я^2 + 2M i_з i_я + J_{зб} \dot{\varphi}^2).$$

Якщо вважати струмів в обмотці збудження сталим, то стан заданої електромеханічної системи визначається двома узагальненими координатами:

$\varphi$  – кут повороту якоря електродвигуна,

$i_я$  – струмів в обмотці якоря електродвигуна.

Узагальнені координати як функції часу можуть бути знайдені із рівнянь Лагранжа-Максвелла

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = M_{зб}; \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{i}_я} \right) = U - i_я R_я;$$

де  $U$  – напруження, прикладене до обмотки якоря,

$R_{\text{я}}$  – опір обмотки якоря.

Під час диференціювання функції Лагранжа-Максвелла вважаємо індуктивності  $L_{\text{з}}$ ,  $L_{\text{я}}$  сталими, а взаємну індуктивність  $M$  – залежною від кута повороту якоря  $\varphi$ .

Виконуючи диференціювання, отримаємо

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} &= J_{\text{зв}} \dot{\varphi}; & \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \right) &= J \ddot{\varphi} + \dot{\varphi}^2 \frac{dJ_{\text{зв}}}{d\varphi}; \\ \frac{\partial L}{\partial \varphi} &= \frac{dM}{d\varphi} i_{\text{я}} i_{\text{з}} + \frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 \frac{dJ_{\text{зв}}}{d\varphi}; & \frac{\partial L}{\partial i_{\text{я}}} &= L_{\text{я}} i_{\text{я}} + M_{\text{з}} i_{\text{з}}; \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial i} \right) &= L_{\text{я}} \frac{di_{\text{я}}}{dt} + \frac{dM}{d\varphi} \dot{\varphi} i_{\text{з}}.\end{aligned}$$

Тепер рівняння Лагранжа-Максвелла приймають вигляд

$$\begin{aligned}J \ddot{\varphi} + \frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 \frac{dJ_{\text{зв}}}{d\varphi} - \frac{dM}{d\varphi} i_{\text{я}} i_{\text{з}} &= M_{\text{зв}}; \\ L_{\text{я}} \frac{di_{\text{я}}}{dt} + \frac{dM}{d\varphi} \dot{\varphi} i_{\text{з}} &= U - i_{\text{я}} R_{\text{я}}.\end{aligned}$$

Сумісний розв'язок цих двох рівнянь дозволяє визначити шукані функції  $\varphi = \varphi(t)$ ;  $i_{\text{я}} = i_{\text{я}}(t)$ .

**Висновки.** Методи Лагранжа і Максвелла дозволяють ефективно досліджувати рух складних механічних і електромеханічних систем. Методи Ляпунова дозволяють дослідити стійкість руху. Електродинамічні аналогії додатково підкреслюють єдність різних форм матерії, а також єдність матерії і руху.

#### Список літератури

1. Maxwell A. Treatise on Electricity and Magnetism. Oxford, 1873.
2. Кожевников С.Н. Динамика нестационарных процессов в машинах. – К.: Наукова думка, 1986. – 287 с.
3. Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по высшей математике. – М.: Физматгиз, 1987. – 458 с.
4. Ляпунов А.М. Общая задача об устойчивости движения. – М.: Гостехиздат, 1950. – 472 с.

#### Эффективные методы исследования электромеханических систем

Литвинов О.И.

*В работе подчеркивается единство разных форм движения материи и освещаются методы исследования движения электромеханических систем, которые базируются на трудах Лагранжа, Максвелла, Ляпунова. Приводятся электромеханические аналогии и примеры исследования систем сельскохозяйственного назначения.*

#### Effective methods of electromechanical systems research

Lytvynov O.I.

*In work the unity of different forms of a matter movement is emphasized and methods of research of mechanical systems movement which are based on Lagranj, Maxwell and Lyapunov researches are shined. Electromechanical analogies and examples of research of systems of agricultural purpose are resulted.*