УДК 514.18

Муквич М.М., к.т.н.,
доцент кафедри природничо-фундаментальних дисциплін,
ВП НУБіП України "НАТІ",
м. Ніжин, Україна

КОНСТРУЮВАННЯ ОБВІДНОЇ ПОВЕРХНІ МНОЖИНИ ПОЛОЖЕНЬ ПЛОЩИНИ, ЖОРСТКО ЗАКРІПЛЕНОЇ В ТРИГРАННИКУ ФРЕНЕ ПРОСТОРОВОЇ КРИВОЇ

Анотація. Аналітичний опис та візуалізацію торса, як обвідної поверхні множини положень площини, здійснено в системі супровідного тригранника просторової напрямної кривої, заданої залежностями у функції її довжини дуги.
Ключові слова: супровідний тригранник Френе, напрямно крива, кривина просторової кривої.

Постановка проблеми. При русі супровідного тригранника просторової кривої жорстко закріплена в ньому площина утворить однопараметричну множину площин, яка у загальному випадку огинає розгортну поверхню. При цьому аналітичний опис торса, як обвідної поверхні однопараметричної множини площин викликає значні труднощі. Використання у якості просторової напрямної кривої лінії, заданої залежностями від довжини її дуги, дозволить застосувати формули Серре-Френе і спростити аналітичний опис розгортної поверхні.

Аналіз останніх досліджень та публікацій. Можливість аналітичного опису торса, як обвідної поверхні множини положень пложини, жорско закріпленої в системі супровідного тригранника напрямної кривої була вказана у статті [1]. У роботі [3] здійснено аналітичний опис обвідної поверхні для випадку плоскої напрямної кривої. Дослідженню торса, як обвідної поверхні однопараметричної множини положень площини, яка здійснює обертальний і поступальний рухи, присвячено статтю [5].

Мета статті. Знайти параметричні рівняння торса, як обвідної поверхні однопараметричної множини площин, утвореної при русі площини, жорстко закріпленої в супровідному тригранику просторової напрямної кривої.

Виклад основного матеріалу. Задамо просторову напрямну криву за допомогою залежностей кривини від довжини дуги $k = k(s)$ і кута $\beta = \beta(s)$, який утворює вектор дотичної $\bar{\tau}$ до напрямної кривої із горизонтальною площиною Oxy (рис.1). Тоді параметричні рівняння напрямної кривої мають вигляд [2]:

$$x(s) = \int \cos\beta \cos\left(\int \frac{\sqrt{k^2 - \beta'^2}}{\cos\beta} ds\right) ds;\ y(s) = \int \cos\beta \sin\left(\int \frac{\sqrt{k^2 - \beta'^2}}{\cos\beta} ds\right) ds;\ z(s) = \int \sin\beta\, ds. \quad (1)$$

Закріпимо жорстко площину α у системі тригранника Френе $O\bar{\tau}\bar{n}\bar{b}$. Нехай площина α проходить через вершину A тригранника просторової напрямної кривої (1) і перпендикулярна вектору $\overline{N}(\lambda;\mu;\nu)$, де $\lambda,\mu,\nu -$ сталі величини (рис.1). Рухаючи тригранник по просторовій напрямній кривій, утвориться однопараметрична множина площин, яка огинає розгортну поверхню [4]. Нехай $\overline{R} = \overline{OD}$, де т. $O-$ початок координат нерухомої системи $Oxyz$, т. $D-$ довільна точка площини α; $\bar{r} = \overline{OA}$ – радіус-вектор напрямної кривої. Тоді вектор $\overline{R} - \bar{r} = \overline{AD}$, який лежить у площині α, перпендикулярний нормальному вектору $\overline{N}$ площини α. Вектор $\overline{N}$ у проекціях на орти тригранника виразимо у вигляді:

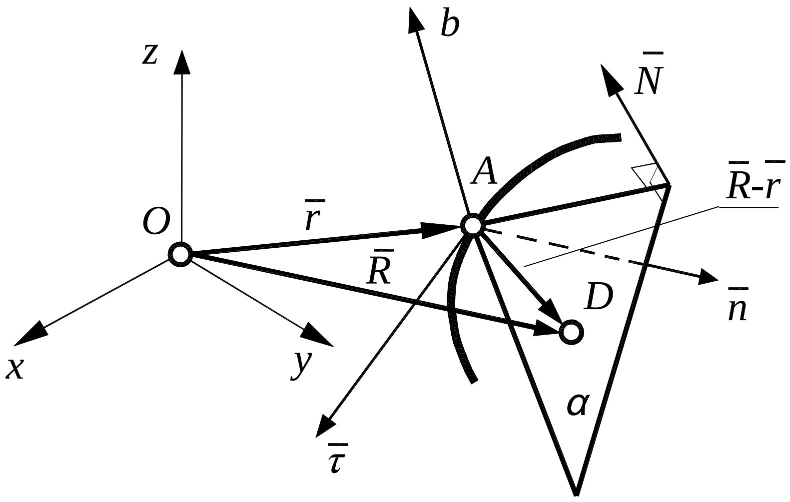

Рис. 1. Площина α, закріплена нерухомо в тригранику Френе просторової напрямної кривої.

$$\overline{N} = \lambda\overline{\tau} + \mu\overline{n} + \nu\overline{b}. \qquad (2)$$

Рівняння площини α у системі супровідного тригранника напрямної кривої запишемо у векторному вигляді [4]:

$$\left(\overline{R} - \overline{r}\right)\left(\lambda\overline{\tau} + \mu\overline{n} + \nu\overline{b}\right) = 0. \qquad (3)$$

Диференціюючи по s вираз (3), зважаючи на те, що $\left(\overline{R} - \overline{r}\right)' = -\overline{\tau}$, та використавши формули Серре-Френе [4], після спрощень отримаємо:

$$\left(\overline{R} - \overline{r}\right)\cdot\left((-\mu k)\overline{\tau} + (\lambda k - \nu\sigma)\overline{n} + (\mu\sigma)\overline{b}\right) = \lambda, \qquad (4)$$

де $k = k(s) -$ кривина, $\sigma = \sigma(s) -$ скрут напрямної кривої (1).

Вираз скруту $\sigma(s)$ кривої (1) знаходять за відомими формулами [4] диференціальної геометрії.

Диференціюємо вираз (4) по змінній s. Використавши формули Серре-Френе, після претворень отримаємо:

$$\left(\overline{R} - \overline{r}\right)\cdot\left[\begin{array}{l}\left(-\lambda k^2 - \mu k' + \nu k\sigma\right)\overline{\tau} + \left(\lambda k' - \mu\left(k^2 + \sigma^2\right) - \nu\sigma'\right)\overline{n} + \\ \qquad\qquad + \left(\lambda k\sigma + \mu\sigma' - \nu\sigma^2\right)\overline{b}\end{array}\right] = -\mu k. \qquad (5)$$

Розкладемо вектор $\overline{R} - \overline{r}$ на орти тригранника $O\overline{\tau}\,\overline{n}\,\overline{b}$ у вигляді:

$$\overline{R} - \overline{r} = \overline{\tau}\rho_\tau + \overline{n}\rho_n + \overline{b}\rho_b, \qquad (6)$$

де $\rho_\tau = \rho_\tau(s)$, $\rho_n = \rho_n(s)$, $\rho_b = \rho_b(s) -$ проекції вектора $\overline{R} - \overline{r}$ на відповідні орти супровідного тригранника, які є параметричними рівняннями ребра звороту шуканого торса в системі тригранника Френе [4].

Знайдемо ребро звороту торса, як обвідної поверхні однопараметричної множини площин, розв'язавши систему рівнянь (3), (4), (5) із урахуванням виразу (6):

$$\begin{cases} \lambda\rho_\tau + \mu\rho_n + \nu\rho_b = 0; \\ (-\mu k)\rho_\tau + (\lambda k - \nu\sigma)\rho_n + (\mu\sigma)\rho_b = \lambda; \\ (-\lambda k^2 - \mu k' + \nu k\sigma)\rho_\tau + (\lambda k' - \mu(k^2+\sigma^2) - \nu\sigma')\rho_n + \\ \qquad +(\lambda k\sigma + \mu\sigma' - \nu\sigma^2)\rho_b = -\mu k; \end{cases} \tag{7}$$

Розв’язавши систему (7) відносно ρ_τ, ρ_n і ρ_b, одержимо рівняння ребра звороту торса в системі супровідного тригранника:

$$\begin{aligned} \rho_\tau &= \frac{1}{\Delta}\left[\lambda^2\nu k' - \mu(\lambda^2+\mu^2+\nu^2)k\sigma - \lambda(\mu^2+\nu^2)\sigma'\right]; \\ \rho_n &= \frac{1}{\Delta}\left[(\lambda^2+\mu^2)\nu k^2 + \lambda\mu(\nu k' + \lambda\sigma') + \lambda(\lambda^2+\mu^2-\nu^2)k\sigma - \lambda^2\nu\sigma^2\right]; \\ \rho_b &= \frac{1}{\Delta}\left[-(\lambda^2+\mu^2)(\lambda k' + \mu k^2) + 2\lambda\mu\nu k\sigma + \lambda^2(\mu\sigma^2 + \nu\sigma')\right], \end{aligned} \tag{8}$$

де $\Delta = (\nu k + \lambda\sigma)\left[(\lambda k - \nu\sigma)^2 + \mu^2(k^2+\sigma^2)\right] - \mu(\lambda^2+\mu^2+\nu^2)(k'\sigma - k\sigma')$.

Напрямний вектор прямолінійної твірної торса отримаємо як векторний добуток $\overline{N}\times d\overline{N}$ [4]. Диференціюючи вираз (2) по s і застосувавши формули Серре-Френе, після спрощень одержимо:

$$d\overline{N} = (-\mu k)\overline{\tau} + (\lambda k - \nu\sigma)\overline{n} + (\mu\sigma)\overline{b}. \tag{9}$$

Знайдемо векторний добуток векторів (2) і (9) у системі тригранника:

$$\overline{N}\times d\overline{N} = \begin{vmatrix} \overline{\tau} & \overline{n} & \overline{b} \\ \lambda & \mu & \nu \\ -\mu k & \lambda k - \nu\sigma & \mu\sigma \end{vmatrix} = \tag{10}$$

$$= \left[(\mu^2+\nu^2)\sigma - \lambda\nu k\right]\overline{\tau} - \mu(\lambda\sigma + \nu k)\overline{n} + \left[(\lambda^2+\mu^2)k - \lambda\nu\sigma\right]\overline{b}.$$

Запишемо напрямний вектор (10) у вигляді:

$$\overline{N}\times d\overline{N} = \overline{\tau}\,l_\tau + \overline{n}\,m_n + \overline{b}\,n_b, \tag{11}$$

де $l_\tau(s) = (\mu^2+\nu^2)\sigma - \lambda\nu k,\ m_n(s) = -\mu(\lambda\sigma + \nu k),\ n_b(s) = (\lambda^2+\mu^2)k - \lambda\nu\sigma$.

Провівши через кожну точку кривої, заданої рівняннями (8), прямолінійну твірну паралельно вектору $\overline{N}\times d\overline{N}$, отримаємо лінійчату поверхню у системі тригранника Френе.

Параметричні рівняння ребра звороту торса у нерухомій системі координат $Oxyz$, заданого рівняннями (8) у системі рухомого тригранника,
отримаємо у вигляді [2]:

$$\begin{aligned} x_p(s) &= x(s) + \rho_\tau\cos\alpha_\tau + \rho_n\cos\alpha_n + \rho_b\cos\alpha_b; \\ y_p(s) &= y(s) + \rho_\tau\cos\beta_\tau + \rho_n\cos\beta_n + \rho_b\cos\beta_b; \\ z_p(s) &= z(s) + \rho_\tau\cos\gamma_\tau + \rho_n\cos\gamma_n + \rho_b\cos\gamma_b, \end{aligned} \tag{12}$$

де $x(s),\ y(s),\ z(s)-$ параметричні рівняння (1) напрямної кривої; ρ_t, ρ_n, ρ_b- знаходять із виразів (8); напрямні косинуси ортів супровідного тригранника напрямної лінії (1) наведено в роботі [2].

Оскільки твірні торса є дотичними до ребра звороту, тому напрямний вектор $\{l,\ m,\ n\}$ прямолінійної твірної торса у нерухомій системі координат можна знайти диференціюванням рівнянь (12). Але це пов’язано з перетвореннями громіздких виразів, тому доцільно виразити вектор $\{l_\tau,\ m_n,\ n_b\}$ у нерухомій системі координат, враховуючи визначеність руху супровідного тригранника по напрямній кривій:

$$l(s) = x(s) + l_\tau \cos\alpha_\tau + m_n \cos\alpha_n + n_b \cos\alpha_b;$$
$$m(s) = y(s) + l_\tau \cos\beta_\tau + m_n \cos\beta_n + n_b \cos\beta_b; \qquad (13)$$
$$n(s) = z(s) + l_\tau \cos\gamma_\tau + m_n \cos\gamma_n + n_b \cos\gamma_b.$$

Параметричні рівняння торса у нерухомій системі координат запишемо в загальному вигляді:

$$X(u,s) = x_p + u \cdot \frac{l}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}; \quad Y(u,s) = y_p + u \cdot \frac{m}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}};$$
$$Z(u,s) = z_p + u \cdot \frac{n}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}, \qquad (14)$$

де вирази $x_p(s),\ y_p(s),\ z_p(s)$ визначаються із (12), а вирази $l(s), m(s), n(s)-$ із залежностей (13).

Розглянемо **тестовий приклад.** Використаємо у ролі напрямної просторової кривої – криву укосу, кривина якої описується залежністю:

$$k(s) = \frac{1}{\sqrt{16a^2 - s^2}}, \qquad (15)$$

де a– параметр кривої, $\beta = const-$ кут підйому кривої. Параметричні рівняння $x(s),\ y(s),\ z(s)$ даної напрямної кривої, які є громіздкими, наведено в роботі [3]. Для визначення ρ_τ, ρ_n і ρ_b; l_τ, m_n, n_b використано вирази:

$$k'(s) = \frac{s}{\left(16a^2 - s^2\right)^{\frac{3}{2}}}; \quad \sigma(s) = k \cdot \mathrm{tg}\,\beta = \frac{\mathrm{tg}\,\beta}{\sqrt{16a^2 - s^2}}; \quad \sigma'(s) = \frac{s \cdot \mathrm{tg}\,\beta}{\left(16a^2 - s^2\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

($a=1;\ \lambda=1;\ \mu=2;\ \nu=3;\ \beta=\frac{\pi}{3};\ s\in(-4;\ 0)$; **1– напрямна крива; 2–ребро звороту).**

На рис.2 зображено горизонтальну проекцію торса, побудованого за рівняннями (14) при підстановці в них виразів (12) і (13), у яких використано параметричні рівняння $x(s),\ y(s),\ z(s)$ напрямної кривої укосу.

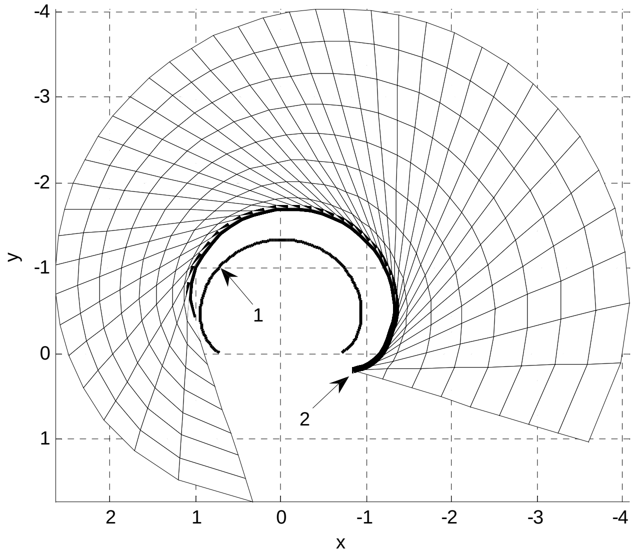

Рис. 2. Горизонтальна проекція торса, як обвідної поверхні множини положень площини, закріпленої жорстко в тригранники Френе напрямної кривої укосу (15)

Висновки. При знаходженні аналітичного опису торса, як обвідної поверхні однопараметричної множини площин, доцільно спочатку знайти параметричні рівняння торсової поверхні у системі супровідного тригранника. Якщо задати напрямну криву параметричними рівняннями у функціях її довжини дуги, то застосування формул Серре-Френе спрощує шуканий аналітичний опис торса.

Список літератури:

1. Якубовский А.М. Некоторые вопросы конструирования поверхностей с помощью трёхгранника Френе / А.М. Якубовский // Труды Университета дружбы народов им. Патриса Лумумбы. – М., 1967.– Т.XXVI. – Математика. – № 3. – Прикладная геометрия. – С. 23–32.
2. Пилипака С.Ф. Конструювання лінійчатих поверхонь загального виду в системі супровідного тригранника напрямної просторової кривої /С.Ф. Пилипа-ка, М.М. Муквич // Праці ТДАТА.– Мелітополь: ТДАТА, 2007. – № 4. – Прикл. геометрія та інж. граф.– Том 35. – С. 10–18.
3. Пилипака С.Ф. Торс, як обвідна поверхня множини положень площини, закріпленої в системі супровідного тригранника плоскої кривої /С.Ф. Пилипака, М.М. Муквич// Праці Таврійського державного агротехнічного університету. – Мелітополь: ТДАТУ, 2008. – № 4.– Прикл. геометрія та інж. граф. – Том 41. – С. 26–35.
4. Милинский В.И. Дифференциальная геометрия / Милинский В.И. – Л.: Кубуч, 1934. – 332 с.
5. Пилипака С.Ф. Дослідження розгортних та супутніх поверхонь, утворених однопараметричними сім’ями площин /С.Ф. Пилипака, Т.А. Кресан// Науковий вісник НУБіП України. – К.: НУБіП України, 2010. – Ч. 1. – С. 232–241.

Аннотация. Аналитическое описание и визуализацию торса, как обводящей поверхности множества положений плоскости, осуществлено в системе сопровождающего трёхгранника пространственной направляющей кривой, заданной зависимостями в функции её длины дуги.
Ключевые слова: сопровождающий трёхгранник Френе, направляющая кривая, кривизна пространственной кривой.

Summary. The analytical description of a reamed surface, as an enveloping surface of assemblage of rules of the plane, is carried out in the system of accompanying three-edge of the space sending of curve, set dependences in the function of its length of arc.
Keywords: accompanying three-edge of Frenet, guide curve, curvature of the space curve.