УДК 539.3

Куценко А.Г.,
доцент кафедри механіки та опору
матеріалів НУБіП України
м. Київ, Україна

Про деякі особливості реалізації метода граничних елементів в теорії згину пластин

Анотація. *Відносно недавно в теорії згину пластин був виявлений цікавий факт, який потім отримав назву парадокс Сапонджана. У даній роботі зроблена спроба виявити проблеми, до яких може призвести парадокс Сапонджана при побудові чисельної схеми прямого методу граничних елементів (ПМГЕ) першого порядку, у випадку, коли границя апроксимується ломаною. Наводяться можливі шляхи їх вирішення, які підтверджені чисельними розрахунками.*

Ключові слова: пластина, переміщення, метод граничних елементів, парадокс Сапонджана.

Аннотация. *Относительно недавно в теории изгиба пластин был обнаружен интересный факт, который потом получил название парадокс Сапонджана. В данной работе сделана попытка установить проблемы, к которым может привести парадокс Сапонджяна при построении численной схемы прямого метода граничных элементов (ПМГЭ) первого порядка, в случае, когда граница аппроксимируется ломаной. Приводятся возможные пути их решения, которые подтверждены численными расчетами.*

Ключевые слова: пластина, перемещения, метод граничных элементов, парадокс Сапонджяна.

Abstract. *In the article the paradox of Sapondzyan was studied once again by an example of a bending problem for a simply supported circular plate. The relationship between the paradox of Sapondzyan and problems of construction of the boundary elements method algorithm was obtained out. A specific technique for the solution of the problems was suggested and illustrated by numerical results.*

Key words: plate, displacements, boundary elements method, paradox of Sapondzyan.

Постановка проблеми. Декілька десятиліть тому в теорії згину пластин було виявлено явище, яке згодом отримало назву „парадокс Сапонджяна”. Воно було достатньо добре висвітлено в літературі [1, с.46], [2, с.145]. Суть цього явища полягає у наступному. Якщо розглянути переміщення двох шарнірно закріплені пластин, які навантажені постійним згинаючим моментом на своїх границях, перша з яких є круглою пластиною одиничного радіуса, а друга являє собою правильний N – кутник, вписаний в одиничне коло, то на перший погляд, логічним припустити, що при граничному переході $N \to \infty$, переміщення цих пластин мають співпадати. Проте розрахунки показують, що переміщення N – кутної пластини значно менші за величиною, ніж круглої. Даний факт обумовлений тим, що при шарнірному закріпленні пластин кутові точки надають пластинам більшу жорсткість, внаслідок цього вклад кожної кутової точки окремо є як завгодно малим, але через збільшення їх числа, сумарний вклад прямує до певного числа.

Аналіз останніх досліджень та публікацій. Необхідно відзначити, що у сучасній механіці існує багато методів дослідження поширення різного роду хвиль в механічних системах. Дослідження одновимірної та квазіодновимірної задачі поширення хвиль у балках і платівках призвело до розробки цілого ряду аналітичних методів, серед яких відзначимо метод матриці переносу (transfer matrix method) [10, с.488], який полягає у побудові матриці, що зв’язує динамічні і кінематичні характеристики та у подальшому відшуканні сталих розповсюдження хвилі через власні значення цієї матриці, метод розкладу розв’язку за просторовими модами [8, с.279] та варіаційні методи [5, с.464], які базуються на співвідношеннях балансу енергії і є розвиненням методів Релея та Релея - Рітца.

Останнім часом у переважній більшості випадків використовується для чисельних обрахунків метод скінченних елементів [6, с.2837], [7, с.2158], [9, с.472]. Однак метод скінченних елементів не можна розглядати як найкраще доповнення до аналітичних методів при дослiджені явища поширення хвиль, зокрема, в періодичних системах. Оскільки відповідні задачі є лінійними граничними задачами для диференціальних рівнянь (звичайних або в часткових похідних), то найбільш вдалим видається використання методу граничних елементів.

Мета статті. Виявити ефекти, до яких може призвести парадокс Сапонджяна при побудові чисельної схеми ПМГЕ першого порядку. Оскільки в схемі ПМГЕ першого порядку границя апроксимується ломаною, а тому парадокс Сапонджяна може привести до порушення одного з постулатів МГЕ: при збільшенні ланок ломаної точність розв'язку має зростати. Для з'ясування цього питання розглянемо вище сформульовані задачі.

Виклад основного матеріал. Як відомо, у випадку гладкого контуру пластини система граничних рівнянь має вид [3, с.115], [4 с.352]:

$$w(\vec{\xi}) = \int_{\Gamma} \left(-V^*(\vec{x},\vec{\xi}) w(\vec{x}) - M^*(\vec{x},\vec{\xi}) \theta(\vec{x}) + \theta^*(\vec{x},\vec{\xi}) M(\vec{x}) - w^*(\vec{x},\vec{\xi}) V(\vec{x}) \right) d\Gamma(\vec{x}),$$

$$\theta(\vec{\xi}) = \int_{\Gamma} \left(-\frac{\partial V^*(\vec{x},\vec{\xi})}{\partial \vec{n}_{\xi}} w(\vec{x}) - \frac{\partial M^*(\vec{x},\vec{\xi})}{\partial \vec{n}_{\xi}} \theta(\vec{x}) + \frac{\partial \theta^*(\vec{x},\vec{\xi})}{\partial \vec{n}_{\xi}} M(\vec{x}) - \frac{\partial w^*(\vec{x},\vec{\xi})}{\partial \vec{n}_{\xi}} V(\vec{x}) \right) d\Gamma(\vec{x}), \quad (1)$$

де $\vec{\xi}$ – точка, яка лежить на контурі пластини Γ; w, θ, M, V – переміщення, кути нахилу, згинаючі моменти та ефективні перерізуючи зусилля, які мають місце в точках пластини.

Фундаментальний розв'язок рівняння згину пластини має вид:

$$w^*(\vec{x},\vec{\xi}) = \frac{r^2}{8\pi D} \ln r, \quad \left(r = |\vec{x} - \vec{\xi}|, \quad \vec{x} = (x, y), \quad \vec{\xi}(\xi,\eta) \right). \quad (2)$$

Розглянемо осесиметричну задачу для круглої пластини одиничного радіусу, тобто $\Gamma = S_1$ одиничне коло, а w, θ, M, V не залежать від $\vec{x}$. Не зменшуючи загальності, приймемо $\vec{\xi} = (R,0)$. Тоді перше рівняння (1) можна подати у наступному виді:

$$w(R) = A(R)w + B(R)\theta + C(R)M + D(R)V. \quad (3)$$

Після нескладних, але громіздких обчислень одержуємо:

$$A(R) = -\int\limits_{S_1} V^*(\vec{x}, \vec{\xi}) dS_1(\vec{x}) \equiv 1. \qquad (4)$$

При виводі (4) було використано, що:

$$V^*(\vec{x}, \vec{\xi}) = Q^*(\vec{x}, \vec{\xi}) + \frac{\partial M_1^*(\vec{x}, \vec{\xi})}{\partial S_1(\vec{x})} dS_1(\vec{x}) = Q^*(\vec{x}, \vec{\xi}), \qquad (5)$$

де $M_1^*(\vec{x}, \vec{\xi})$ – скручуючий момент.

Якщо підрахувати коефіцієнти, що залишились в (3) та коефіцієнти рівняння, виведеного на основі другого співвідношення (1), то після розв'язку одержаної алгебраїчної системи приходимо до висновку, що пластина знаходиться в стані чистого згину.

Розглянемо N – кутну пластину, яка відповідає ПМГЕ першого порядку для круглої пластини. У цьому випадку:

$$A(R) = -\int\limits_{-a_j}^{a_j} V^*(\vec{x}, \vec{\xi}) dy_j. \qquad (6)$$

де $V^*(\vec{x}_j, \vec{\xi}_j) = Q^*(\vec{x}_j, \vec{\xi}_j) + \dfrac{\partial M^*_{x_j y_j}(\vec{x}_j, \vec{\xi}_j)}{\partial y_j}$, (7)

$\vec{x}_j$, $\vec{\xi}_j$ – координати точок $\vec{x}$ і $\vec{\xi}$, в локальній системі координат, яка пов'язана з j – тим граничним елементом, що відповідає стороні N – кутника.

Виходячи з (2), можна зробити висновок, що:

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{j=1}^{N} A_j^{(1)} = 1, \qquad \lim_{N\to\infty} \sum_{j=1}^{N} A_j^{(2)} = \frac{1-\nu}{2}\left(1 - R^2\right). \qquad (8)$$

Були розглянуті задачі для еліптичної пластини з головними радіусами $r_x = 2$, $r_y = 1$ у наступних випадках: 1. вільно обіперта пластина з нульовим переміщенням і постійним згинаючим моментом M_0 на контурі; 2. вільно обіперта пластина з постійними переміщеннями w і постійним згинаючими моментами M_0 на контурі. Результати розрахунків наведено в табл. 1.

Табл. 1. Результати розрахунку еліптичної пластини $(n = 0{,}3$, $M_0 = D$, $w_0 = 10)$

x	y	задача 1, точний розв'язок	задача 2, повна схема	задача 2, спрощена схема
0,00	0,00	0,49727	9,78555	10,4972
0,50	0,00	0,46996	9,82715	10,4799
0,00	0,25	0,46568	9,79928	10,4657
0,00	0,50	0,37134	9,84280	10,3713

Аналогічні розрахунки були проведені і на випадок квадратної пластини з одиничною довжиною сторони, їх результати представлені в табл. 2.

Табл. 2. Результати розрахунку квадратної пластини $(n = 0{,}3$, $M_0 = D$, $w_0 = 10)$

x	y	задача 1, точний розв'язок	задача 2, повна схема	задача 2, спрощена схема
0,50	0,50	0,07378	10,7958	10,0738
0,50	0,75	0,05742	10,6179	10,0574
0,75	0,75	0,04536	10,5968	10,0454

Висновки: таким чином, складова ефективного перерізуючого зусилля, що відповідає скручуючому моменту, наперед привносить помилку у розв'язок задачі, при заміні гладкого контуру ломаною.

Оскільки коефіцієнт $V^*(\vec{x},\vec{\xi})$ стоїть при прогині, то у випадку нульового прогину на границі він не буде впливати на кінцевий результат. Якщо $w_0 \neq 0$, то має значення чи беремо $V^*(\vec{x},\vec{\xi})$ (повна схема), чи $Q^*(\vec{x},\vec{\xi})$ (скорочена схема) за відповідний коефіцієнт. Все це відноситься до коефіцієнту при w у другому рівнянні (1).

Порівнюючи (6) – (8) з (4), приходимо до висновку, що при реалізації чисельної схеми ПМГЕ першого порядку замість $V^*(\vec{x},\vec{\xi})$ необхідно брати $Q^*(\vec{x},\vec{\xi})$. Цей висновок повністю підтверджують результати розрахунків наведених в таблицях 1 і 2.

Список літератури:

1. Хомасуридзе Н.Г. О некоторых предельных переходах в теории упругости и о "парадоксе Сапонджяна" / Н.Г. Хомасуридзе // Изв. РАН. МТТ. - 2007. - № 3. - С. 46-54.
2. Пановко Я.Г. Механика деформируемого твердого тела / Я.Г. Пановко / М.: Наука, 1985. - 287с.
3. Бенеджи П. Метод граничных элементов в прикладных науках / П. Бенеджи, Р. Баттерфилд / М.: Мир, 1984. – 494 с.
4. Бреббия К. Метод граничных элементов / К. Бреббия, Ж. Теплес, Л. Вроубел / М.: Мир, 1987. – 524 с.
5. Mead D.J. An approximate method of predicting the responds of periodically supported beams subjected to random con-vected loading / D.J. Mead, A.K. Mallik // J. Sound and Vibr. - 1976. - Vol. 47. - N4. - P. 457 - 471.
6. Mace B.R. “Finite element prediction of wave motion in structural waveguides” / B.R. Mace, D. Duhamel, M.J. Brennan, L. Hinke // Journal of the Acoustical Society of America - 2005. - Vol. 117. - P. 2835 – 2843.
7. Mencik J.M., Wave finite elements in guided elastodynamics with internal fluid / J.M. Mencik, M.N. Ichchou // Inter. J. of Sol. And Structures – 2007. – Vol. 44. - P. 2148 – 2167.
8. Ouyang H.J. General method for an alyzing wave propagation along longitudinally periodic structures / H.J. Ouyang, F.W. Williams, D.A Kennedy // J. Sound and Vibr. - 1994. - Vol. 177. - N2. - P. 277 - 281.
9. Tyutekin V.V. Circumferential and helical normal waves of a cylindrical waveguide: helical waves in s free space / V.V. Tyutekin // Acoustical Physics. – 2006. – Vol. 52. - N 4. - P. 471 – 476.
10. Zhong W.X. On the direct solution of wave propagation for repetitive structures / W.X. Zhong, F.W. Williams // J. Sound and Vibr. - 1995. - Vol. 181. - N3. - P. 485 - 501.