УДК 531/ 534(075.8)

РІВНЯННЯ ЛАГРАНЖА-МАКСВЕЛЛА ДЛЯ ЕЛЕКТРОМЕХАНІЧНИХ СИСТЕМ

Литвинов О.І.[1], Назаренко О.О.[2]
[1] канд. техн. наук, доцент, ВП НУБіП України "Ніжинський агротехнічний інститут", м. Ніжин, Україна
[2] студент, ВП НУБіП України "Ніжинський агротехнічний інститут", м. Ніжин, Україна

В роботі висвітлюються методи дослідження руху електромеханічних систем, які базуються на працях Лагранжа і Максвелла. Приводяться електромеханічні аналогії и надаються приклади дослідження конкретних систем.

Вступ. Багато точних законів фізики можуть слугувати підтвердженням аналогічності рівнянь і виразів. Наприклад, структура всім відомих другого закону Ньютона, закону Гука і закону Ома є ідентичною:

$$m\vec{a} = \vec{F}; \qquad cx = F; \qquad Ri = U.$$

Спільним у цих виразах є те, що в них входять лише три величини, кожна з яких визначається і є незалежною.

Другий приклад. Візьмемо закон гравітації, відкритий Ньютоном, закон про взаємодію двох електричних зарядів, відкритий Кулоном, і закон взаємодії магнітних полів.

Закон всесвітнього притягання

$$F = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2},$$

де m_1, m_2 – маси взаємодіючих тіл, , γ – гравітаційна стала, r – відстань між тілами.

Аналогічний закон для електричних зарядів

$$F = \varepsilon \frac{q_1 q_2}{r^2},$$

де ε – відносна діелектрична проникність, q_1, q_2 – взаємодіючі електричні заряди, r – відстань між зарядами.

Закон взаємодії магнітних полів

$$F = \mu \frac{B_1 B_2}{r^2},$$

де μ – магнітна проникність, B_1, B_2 – магнітна індукція, r – відстань між джерелами магнітного поля.

Як легко побачити, структура алгебраїчних виразів цих законів повністю аналогічні, але фізична природа цих взаємодії є абсолютно різною.

Розглянемо приклад коливань тягаря масою m, підвішеного на вертикальній пружині з коефіцієнтом жорсткості c. Диференціальне рівняння вільних коливань цього тягаря має відомий вигляд

$$m\ddot{x} + cx = 0,$$

де x – переміщення тягаря.

Кожному параметру механічної системи можна поставити у відповідність параметр електричної системи і навпаки. Наприклад, інерційні властивості тіл в механічній системі залежать від маси і моментів інерції. В електричних системах існують аналоги цих понять – індуктивність і ємність. Диференціальне рівняння коливань електричного контуру, що складається з котушки індуктивності L і конденсатора ємності С, має аналогічний вигляд, як і для коливань тягаря.

$$L\ddot{q} + \frac{1}{C} q = 0,$$

де q – заряд конденсатора.

Рівняння Лагранжа-Максвелла. При дослідженні механічних систем найчастіше застосовують рівняння Лагранжа другого роду. На практиці часто зустрічаються електромеханічні системи, механічний рух яких визначається силами електромагнітної природи. Джеймс Максвелл у своїй праці [1] про електрику і магнетизм застосував рівняння Лагранжа другого роду для дослідження системи, що містила механічні елементи і електричні провідники зі струмом.

Центральним рівнянням аналітичної механіки є рівняння Лагранжа другого роду, в якому базовою величиною є енергія кінетична і потенціальна. Ці рівняння слугують основою для перенесення методів аналітичної механіки на електродинаміку у формі рівнянь Лагранжа – Максвелла, де замість кінетичної і потенціальної енергії оперують енергією електричного і магнітного полів.

Таким чином, аналітична механіка є єдиною наукою, яка дає спільний апарат – рівняння Лагранжа-Максвелла для складання диференціальних рівнянь електромеханічних систем, які є основою сучасної техніки, бо сьогодні важко уявити прилад чи машину, де б були тільки механічні елементи.

Складання цих рівнянь передбачає, що стан електромеханічної системи описується узагальненими координатами механічної частини, кількість яких у голономних системах, що мають геометричні в’язі, які не залежать від швидкостей точок, а тільки від координат, дорівнює числу ступенів вільності механізму, і узагальненими координатами електричної частини, які визначають стан електричної частини системи.

Узагальнені механічні координати позначимо $q_i(q_1, q_2, ..., q_n)$, де число n дорівнює кількості ступенів вільності механізму. За узагальнені механічні координати вибираємо лінійні або кутові параметри ланок.

Узагальнені електричні координати позначимо $g_k(g_1, g_2, ..., g_m)$, де число m дорівнює кількості електричних ступенів вільності. За узагальнені електричні координати вибираємо кількості електрики (заряди).

Похідні за часом від узагальнених механічних координат уявляють узагальнені швидкості $\dot{q}_i$, а похідні за часом від узагальнених електричних уявляють узагальнені струми $\dot{g}_k$.

Рівняння Лагранжа-Максвелла для електромеханічних систем мають вигляд

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i, \qquad i = 1,2,...,n, \tag{1}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{g}_k}\right) - \frac{\partial L}{\partial g_k} = Q_k, \qquad k = 1,2,...,m. \tag{2}$$

У цих рівняннях літера L є функцією Лагранжа-Максвелла, яка дорівнює сумі «електричної» функції Лагранжа L_E і «механічної» функції Лагранжа L_M:

$$L = L_E + L_M.$$

«Механічна» функція Лагранжа, як відомо, рівна різниці кінетичної T і потенціальної енергії Π механічної системи

$$L_M = T - \Pi.$$

«Електрична» функція Лагранжа для механізмів з електроприводом співпадає з магнітною енергією системи

$$L_E = \frac{1}{2}\sum_{r,s=1}^{\infty} L_{rs} i_r i_s,$$

де r та s – кількість незалежних електричних контурів (витків, обмоток), по яких протікають струми i_r та i_s; L_{rs} при $r \neq s$ – взаємна індуктивність (коефіцієнт взаємоіндукції), а при $r = s$ – індуктивність (коефіцієнт самоіндукції).

Узагальнена або зведена сила Q_i визначається як скалярна величина, рівна коефіцієнту при варіації цієї узагальненої координати у виразі елементарної роботи сил.

Узагальнена «сила» Q_k визначається за аналогією з Q_i, як скалярна величина, що дорівнює коефіцієнту при варіації цієї «електричної» узагальненої координати у виразі елементарної роботи електричних сил

$$\delta A = \sum_{k=1}^{m} (E_{r,s} - R_{r,s} i_{r,s}) \delta g_k, \qquad (3)$$

де $E_{r,s}$ – електрорушійна сила контуру,

$R_{r,s}$ – електричний опір контуру.

Приклад 1. Електромагнітний прилад складається із рухомої котушки певної маси, що обертається у сталому магнітному полі, який утворює інша нерухома котушка, що складають одна з одній послідовний електричний ланцюг.

На рухому котушку діє пара сил з боку пружини з коефіцієнтом жорсткості c. В обертальній парі рухомої котушки має місце в'язке тертя з коефіцієнтом опору β.

За узагальнені координати системи приймаємо кут повороту рухомої котушки φ та струм i, що протікає крізь обмотки котушок. Тоді «механічна» функція Лагранжа приймає вигляд

$$L_M = \frac{1}{2}(J\dot{\varphi}^2 - c\varphi^2),$$

де J – момент інерції рухомої котушки відносно осі обертання.

«Електрична» функція Лагранжа має вигляд

$$L_E = \frac{1}{2}(L_1 + L_{12} + L_2) i^2,$$

де індекс 1 стосується рухомої котушки, а індекс 2 – нерухомої.

За умови симетрії взаємна індуктивність $L_{12} = L_{21}$. Позначимо їх суму (повний коефіцієнт взаємної індуктивності) через $2M$ і приймемо до уваги, що цей коефіцієнт залежить від взаємного розміщення котушок, тобто від кута повороту рухомої котушки φ. Звичайно приймають

$$M = M_o \sin\varphi,$$

де кут повороту φ відраховується від положення, при якому котушки перпендикулярні. Індуктивність котушок L_1, L_2 вважаємо сталими величинами.

Таким чином, остаточно функція Лагранжа-Максвелла має вигляд

$$L = \frac{1}{2}[(L_1 + L_2 + 2M_o \sin\varphi)i^2 + J\dot{\varphi}^2 - c\varphi^2]. \qquad (4)$$

Узагальнена сила Q_i знаходиться із виразу елементарної роботи сил тертя на можливому переміщенні системи (робота сил пружності пружини врахована при складанні виразу потенціальної енергії):

$$\delta A = -\beta\dot{\varphi}\delta\varphi \quad \Rightarrow Q_i = -\beta\dot{\varphi}.$$

Узагальнена сила Q_k знаходиться із виразу елементарної роботи «електричних сил»

$$\delta A = (E - iR)\delta i \quad \Rightarrow Q_k = E - iR,$$

де R – сумарний опір обмоток котушок,
E – зовнішня електрорушійна сила.

Рівняння Лагранжа-Максвелла:

$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}}) - \frac{\partial L}{\partial\varphi} = -\beta\dot{\varphi}, \qquad (5)$$

$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial i}) = E - iR. \qquad (6)$$

Визначимо похідні від функції Лагранжа-Максвелла:

$$\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}} = J\dot{\varphi}; \quad \frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}}) = J\ddot{\varphi}; \quad \frac{\partial L}{\partial\varphi} = M_o i^2 \cos\varphi - c\varphi;$$

$$\frac{\partial L}{\partial i} = (L_1 + L_2 + 2M_o \sin\varphi)i;$$

$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial i}) = (L_1 + L_2 + 2M_o \sin\varphi)\frac{di}{dt} + 2M_o i\dot{\varphi}\cos\varphi.$$

Підставимо в останні рівняння значення похідних. У підсумку отримаємо остаточно рівняння Лагранжа-Максвелла

$$\begin{aligned} &J\ddot{\varphi} - M_o i^2 \cos\varphi + c\varphi = --\beta\dot{\varphi}, \\ &(L_1 + L_2 + 2M_o \sin\varphi)\frac{di}{dt} + 2M_o i\dot{\varphi}\cos\varphi = E - iR. \end{aligned} \qquad (7)$$

Сумісне розв'язання цих двох рівнянь дозволяє отримати шукані функції зміни узагальнених координат за часом

$$\varphi = \varphi(t); \quad i = i(t).$$

Приклад 2. За допомогою електродвигуна сталого струму з незалежним збудженням і параметрами: $J_{зв}$ – зведений момент інерції; $M_{зв}$ – зведений момент сил (задані параметри є функціями кута повороту ротора електродвигуна) рухається вхідна ланка механізму.

Скласти рівняння Лагранжа-Максвелла для заданої електромеханічної системи.

Позначимо індуктивності обмоток збудження і якоря літерами $L_з, L_я$, взаємну індуктивність через $L_{зя}, L_{яз} = M$, струми в обмотках збудження і якоря, відповідно, через $i_з, i_я$. Тоді функція Лагранжа-Максвелла отримує вигляд:

$$L = \frac{1}{2}(L_з i_з^2 + L_я i_я^2 + 2M i_я i_з + J_{зв}\dot{\varphi}^2). \quad (8)$$

Якщо вважати струмінь в обмотці збудження сталим, то стан заданої електромеханічної системи визначається двома узагальненими координатами:

φ – кут повороту якоря електродвигуна,

$i_я$ – струмінь в обмотці якоря електродвигуна.

Узагальнені координати як функції часу можуть бути знайдені із рівнянь Лагранжа-Максвелла

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = M_{зв}; \quad (9)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial i_я}\right) = U - i_я R_я; \quad (10)$$

де U – напруження, прикладене до обмотки якоря,
$R_я$ – опір обмотки якоря.

Під час диференціювання функції Лагранжа-Максвелла вважаємо індуктивності $L_з, L_я$ сталими, а взаємну індуктивність M – залежною від кута повороту якоря φ.

Виконуючи диференціювання, отримаємо

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = J_{зв}\dot{\varphi}; \quad \frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}) = J\ddot{\varphi} + \dot{\varphi}^2 \frac{dJ_{зв}}{d\varphi};$$

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = \frac{dM}{d\varphi} i_я i_з + \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 \frac{dJ_{зв}}{d\varphi}; \quad \frac{\partial L}{\partial i_я} = L_я i_я + M_з i_з;$$

$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial i}) = L_я \frac{di_я}{dt} + \frac{dM}{d\varphi}\dot{\varphi} i_з.$$

Тепер рівняння Лагранжа-Максвелла приймають вигляд

$$\begin{aligned} &J\ddot{\varphi} + \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 \frac{dJ_{зв}}{d\varphi} - \frac{dM}{d\varphi} i_я i_з = M_{зв}; \\ &L_я \frac{di_я}{dt} + \frac{dM}{d\varphi}\dot{\varphi} i_з = U - i_я R_я. \end{aligned} \tag{11}$$

Сумісний розв’язок цих двох рівнянь дозволяє визначити шукані функції $\varphi = \varphi(t); \quad i_я = i_я(t).$

Список літератури

1. Maxwell A. Treatise on Electricity and Magnetism. Oxford, 1873.
2. Кожевников С.Н. Динамика нестационарных процессов в машинах. – К.: Наукова думка, 1986. – 287 с.
3. Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по высшей математике. – М.: Физматгиз, 1987. – 458 с.

Уравнения Лагранжа-Максвелла для электромеханических систем Литвинов О.И., Назаренко А.А.

В работе освещаются методы исследования движения электромеханических систем, которые базируются на трудах Лагранжа, Максвелла. Приводятся электромеханические аналогии и примеры исследования конкретных систем.