УДК 514.18

АНАЛІТИЧНИЙ ОПИС ІЗОТРОПНИХ КРИВИХ, ЯКІ ЛЕЖАТЬ НА ПОВЕРХНЯХ ОБЕРТАННЯ, ПРИ УТВОРЕННІ МІНІМАЛЬНИХ ПОВЕРХОНЬ

Пилипака С.Ф.[1], Муквич М.М.[2]
[1]д–р техн. наук., професор, ВП НУБіП України «Ніжинський агротехнічний інститут», м. Ніжин, Україна
[2]канд. техн. наук., доцент, ВП НУБіП України «Ніжинський агротехнічний інститут», м. Ніжин, Україна

Анотація. У статті здійснено аналітичний опис ізотропних кривих, які лежать на поверхнях обертання, при утворенні неперервного каркасу мінімальних поверхонь. Знайдено параметричні рівняння ізотропних кривих, які лежать на поверхні відкритого тора, побудовано відповідні мінімальні поверхні.

Ключові слова: ізотропна крива, мінімальна поверхня, відкритий тор, лінійний елемент поверхні, ізометрична сітка координатних ліній.

Постановка проблеми. Розширення геометричних способів конструювання мінімальних поверхонь, які застосовуються при проектуванні поверхонь технічних форм та архітектурних конструкцій, є важливою проблемою моделювання неперервного каркасу цих поверхонь. Вивчення мінімальних поверхонь зумовлене дослідженням геометричної задачі знаходження поверхні, яка проходить через замкнену криву (контур) і має найменшу площу [6]. Аналітичний опис мінімальних поверхонь пов'язаний із знаходженням параметричних рівнянь уявних ізотропних кривих нульової довжини. Але утворення параметричних рівнянь мінімальних поверхонь вимагає відокремлення дійсної і уявної частини функції комплексної змінної, що можливо тільки для окремих видів ізотропних кривих. Тому розширення методів аналітичного опису ізотропних кривих нульової довжини є важливою проблемою моделювання неперервних каркасів мінімальних поверхонь.

Аналіз останніх досліджень та публікацій. У працях [3, 4] розроблено способи знаходження аналітичного опису ізотропних кривих за формулами Шварца та Вейєрштрасса, але вони тільки в окремих випадках дозволяють знайти параметричні рівняння цих уявних кривих. У роботі [1] розглянуто моделювання мінімальних поверхонь на основі ізотропних кривих Без'є третього порядку.

Мета дослідження. Розробити метод аналітичного опису ізотропних кривих, які лежать на поверхнях обертання, віднесених до ізометричної сітки координатних ліній. Дослідити закономірності утворення параметричних рівнянь ізотропних кривих, які лежать на поверхні відкритого тора, та побудувати відповідні мінімальні поверхні.

Виклад основного матеріалу. Розглянемо поверхню обертання, параметричні рівняння якої мають вигляд:

$$X(\tau;v)=\varphi(\tau)\cdot\cos v; \qquad Y(\tau;v)=\varphi(\tau)\cdot\sin v; \qquad Z(\tau;v)=\psi(\tau), \tag{1}$$

де $\varphi=\varphi(\tau);\ \psi=\psi(\tau)-$ параметричні рівняння меридіана поверхні обертання, $\tau\in R;\ v\in[0;\ 2\pi).$.

У роботі [2] наведено алгоритм відшукання параметричних рівнянь меридіана поверхні обертання, при якому поверхня буде віднесена до ізометричних координат. Перехід від ортогональної до ізометричної сітки координат здійснюється за допомогою уведення нової змінної t яка пов'язана із змінною τ наступним чином [2]:

$$t=\int\frac{\sqrt{(\varphi'_\tau)^2+(\psi'_\tau)^2}}{\varphi}d\tau. \tag{2}$$

Складність переходу від ортогональної до ізометричної сітки координат полягає в тому, що для деяких поверхонь, наприклад еліпсоїда, невизначений інтеграл (2) не можна виразити за допомогою елементарних функцій. Але після знаходження інтеграла (2) необхідно виразити $\tau=\tau(t)$ і підставити у параметричні рівняння (1), що неможливо здійснити, наприклад, для параболоїда. У роботах [2, 5] показано алгоритми знаходження параметричних рівнянь поверхонь обертання, віднесених до ізометричних координат.

Нехай маємо параметричні рівняння поверхні обертання, віднесеної до ізометричних координат:

$$X(t;v)=\varphi(t)\cdot\cos v; \qquad Y(t;v)=\varphi(t)\cdot\sin v; \qquad Z(t;v)=\psi(t), \tag{3}$$

де $\varphi=\varphi(t);\ \psi=\psi(t)-$ параметричні рівняння меридіана поверхні обертання, $t\in R;\ v\in[0;\ 2\pi).$.

Тоді лінійний елемент поверхні обертання (3), віднесеної до ізометричних координат, має вигляд:

$$ds^2=\alpha(t)\cdot\left(dv^2+dt^2\right), \tag{4}$$

де $E=G=\alpha(t)-$ деякий вираз крайніх коефіцієнтів першої квадратичної форми поверхні (3). Розклавши на множники вираз (4) отримаємо: $ds^2=\alpha(t)\cdot(dv-i\cdot dt)(dv+i\cdot dt)$, де $i-$уявна одиниця.

Прирівнюючи до нуля праву частину останньої рівності, після інтегрування отримаємо:

$$v = i \cdot t + C \quad \text{або} \quad v = -i \cdot t + C, \qquad (5)$$

де $C-$довільна стала інтегрування. Вирази (5) називають координатами Дарбу (Darboux) [6].

Лінійний елемент (4) поверхні обертання (3) визначає довжину будь-якої кривої, яка лежить на його поверхні. Тому при підстановці одного із виразів (5) у параметричні рівняння поверхні обертання (3) отримаємо параметричні рівняння двох сімей уявних ізотропних кривих нульової довжини. Зокрема, при підстановці виразу $v = i \cdot t + C$ у рівняння (3) для кожного значення C отримаємо параметричні рівняння уявної ізотропної кривої, яка лежить на поверхні обертання:

$$x(t) = \varphi(t) \cdot \cos(i \cdot t + C); \qquad y(t) = \varphi(t) \cdot \sin(i \cdot t + C); \qquad Z(t) = \psi(t), \qquad (6)$$

Із метою знаходження рівнянь мінімальної та приєднаної до неї мінімальної поверхні для функцій комплексної змінної (6) уведемо заміну: $t = u + i \cdot v$.

Тоді отримаємо параметричні рівняння мінімальної поверхні [6] $X(u,v), Y(u,v), Z(u,v)$:

$$X(u,v) = \mathrm{Re}\{x(u + i \cdot v)\};\ Y(u,v) = \mathrm{Re}\{y(u + i \cdot v)\};\ Z(u,v) = \mathrm{Re}\{z(u + i \cdot v)\}; \qquad (7)$$

та приєднаної мінімальної поверхні $X^*(u,v), Y^*(u,v), Z^*(u,v)$:

$$X^*(u,v) = \mathrm{Im}\{x(u + i \cdot v)\};\ Y^*(u,v) = \mathrm{Im}\{y(u + i \cdot v)\};\ Z^*(u,v) = \mathrm{Im}\{z(u + i \cdot v)\}. \qquad (8)$$

Вираз (4) лінійного елемента поверхні обертання можна розкласти на множники у вигляді:

$$ds^2 = \alpha(t) \cdot (dt - i \cdot dv)(dt + i \cdot dv).$$

Прирівнюючи до нуля праву частину останньої рівності, після інтегрування отримаємо:

$$t = i \cdot v + C \quad \text{або} \quad t = -i \cdot v + C, \qquad (9)$$

де $C-$довільна стала інтегрування. Підставивши вирази (9) у рівняння (3), для кожного значення C отримаємо параметричні рівняння двох уявних ізотропних кривих, які лежать на поверхні обертання.

Тобто для кожної поверхні обертання (3), віднесеної до ізометричних координат, можна утворити чотири сім'ї ізотропних кривих. Замінюючи значення аргументу у рівняннях ізотропної кривої виразом $u + i \cdot v$, за умови відокремлення змінних, для кожної вказаної кривої можна знайти аналітичний опис відповідної мінімальної поверхні та приєднаної мінімальної поверхні. Слід зазначити, що утворені чотири мінімальні поверхні (та приєднані мінімальні поверхні) мають рівні коефіцієнти першої та другої квадратичних форм, тобто вони характеризуються однаковими метричними властивостями та однаковими властивостями кривини поверхні.

Розглянемо поверхню відкритого тора (кільця), яку задано параметричними рівняннями:

$$\begin{aligned} X(\tau;v) &= (R + r\cos\tau)\cdot\cos v; \\ Y(\tau;v) &= (R + r\cos\tau)\cdot\sin v; \\ Z(\tau;v) &= r\sin\tau, \end{aligned} \tag{10}$$

де r – радіус твірного кола (меридіана поверхні);
R – радіус напрямного кола, по якому рухається центр твірного кола;
для відкритого тора: $r < R;\ \tau \in [0;\ 2\pi);\ v \in [0;\ 2\pi).$

Якщо $r < R,$ тоді умова (2) переходу до ізометричної сітки координат після інтегрування має вигляд:

$$t(\tau) = \frac{2r}{\sqrt{R^2 - r^2}}\cdot\mathrm{arctg}\left(\sqrt{\frac{R-r}{R+r}}\cdot\mathrm{tg}\frac{\tau}{2}\right). \tag{11}$$

Виразимо із (11) $\tau(t) = 2\,\mathrm{arctg}\left(\sqrt{\frac{R+r}{R-r}}\cdot\mathrm{tg}\frac{\sqrt{R^2-r^2}}{2r}t\right)$ і підставимо у рівняння (3). Після перетворень отримаємо параметричні рівняння відкритого тора $(r < R)$, віднесеного до ізометричних координат:

$$\begin{aligned} X(t;v) &= \frac{R^2 - r^2}{R - r\cos(\beta\cdot t)}\cdot\cos v; \\ Y(t;v) &= \frac{R^2 - r^2}{R - r\cos(\beta\cdot t)}\cdot\sin v; \\ Z(t;v) &= -\frac{r\cdot\sqrt{R^2-r^2}\cdot\sin(\beta\cdot t)}{R - r\cos(\beta\cdot t)}, \end{aligned} \tag{12}$$

де $\beta = \frac{\sqrt{R^2 - r^2}}{r}.$

Тоді лінійний елемент відкритого тора (12), віднесеного до ізометричної системи, має вигляд:

$$ds^2 = \left(\frac{R^2 - r^2}{R - r\cos(\beta\cdot t)}\right)^2\cdot\left(dv^2 + dt^2\right). \tag{13}$$

При підстановці виразу $v = i\cdot t + C$ у рівняння (12) для кожного значення C отримаємо параметричні рівняння уявної ізотропної кривої (6), яка лежить на поверхні відкритого тора $(r < R)$:

$$x(t)=\frac{R^2-r^2}{R-r\cos(\beta\cdot t)}\cdot\cos(i\cdot t+C);$$
$$y(t)=\frac{R^2-r^2}{R-r\cos(\beta\cdot t)}\cdot\sin(i\cdot t+C);\tag{14}$$
$$Z(t;v)=-\frac{r\cdot\sqrt{R^2-r^2}\cdot\sin(\beta\cdot t)}{R-r\cos(\beta\cdot t)},$$

де $\beta=\dfrac{\sqrt{R^2-r^2}}{r}$.

Для знаходження рівнянь мінімальної та приєднаної до неї мінімальної поверхні для функцій комплексної змінної (14) уведемо заміну: $t=u+i\cdot v$. Відокремивши дійсну та уявну частину для кожної з функцій (14), маємо, згідно (7), рівняння мінімальної поверхні ($C-$довільна стала):

$$X(u,v)=\frac{\cos(C-v)\text{ch}(u)[R-r\cos(\beta u)\text{ch}(\beta v)]-r\sin(\beta u)\sin(C-v)\cdot\text{sh}\,u\cdot\text{sh}(\beta v)}{\left[(R-r\cos(\beta u)\text{ch}(\beta v))^2+r^2\sin^2(\beta u)\text{sh}^2(\beta v)\right]\cdot\left(R^2-r^2\right)^{-1}};$$
$$Y(u,v)=\frac{\sin(C-v)\text{ch}(u)[R-r\cos(\beta u)\text{ch}(\beta v)]+r\sin(\beta u)\cos(C-v)\cdot\text{sh}\,u\cdot\text{sh}(\beta v)}{\left[(R-r\cos(\beta u)\text{ch}(\beta v))^2+r^2\sin^2(\beta u)\text{sh}^2(\beta v)\right]\cdot\left(r^2-R^2\right)^{-1}};$$
$$Z(u,v)=\frac{2r\sqrt{R^2-r^2}\cdot[r\cos(\beta u)-R\,\text{ch}(\beta v)]\cdot\sin(\beta u)}{2R^2+r^2\cos(2\beta u)-4r\cdot R\cdot\cos(\beta u)\cdot\text{ch}(\beta v)+r^2\,\text{ch}(2\beta v)};\tag{15}$$

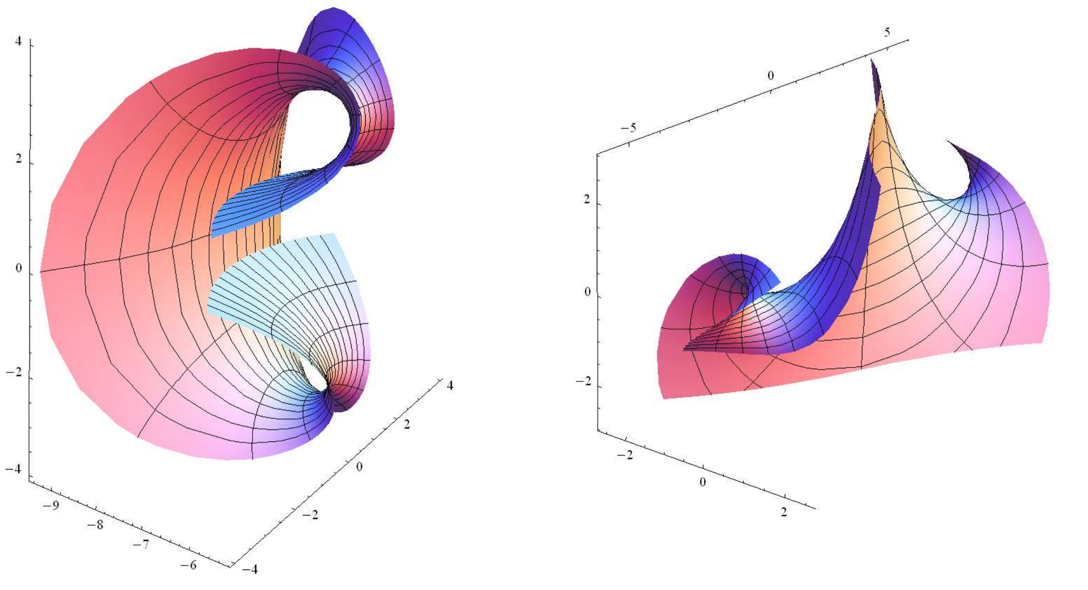
де $\beta=\dfrac{\sqrt{R^2-r^2}}{r}$.

та, згідно (8), рівняння приєднаної мінімальної поверхні:

$$X^*(u,v)=\frac{\sin(C-v)\text{sh}(u)[R-r\cos(\beta u)\text{ch}(\beta v)]-r\sin(\beta u)\cos(C-v)\cdot\text{ch}\,u\cdot\text{sh}(\beta v)}{\left[(R-r\cos(\beta u)\text{ch}(\beta v))^2+r^2\sin^2(\beta u)\text{sh}^2(\beta v)\right]\cdot\left(r^2-R^2\right)^{-1}};$$
$$Y^*(u,v)=\frac{\cos(C-v)\text{sh}(u)[-R+r\cos(\beta u)\text{ch}(\beta v)]+r\sin(\beta u)\sin(C-v)\cdot\text{ch}\,u\cdot\text{sh}(\beta v)}{\left[(R-r\cos(\beta u)\text{ch}(\beta v))^2+r^2\sin^2(\beta u)\text{sh}^2(\beta v)\right]\cdot\left(R^2-r^2\right)^{-1}};$$
$$Z^*(u,v)=\frac{2r\sqrt{R^2-r^2}\cdot[-R\cos(\beta u)+r\,\text{ch}(\beta v)]\cdot\text{sh}(\beta v)}{2R^2+r^2\cos(2\beta u)-4r\cdot R\cdot\cos(\beta u)\cdot\text{ch}(\beta v)+r^2\,\text{ch}(2\beta v)};\tag{16}$$

де $\beta=\dfrac{\sqrt{R^2-r^2}}{r}$.

На рис.1 зображено відсіки мінімальної та приєднаної поверхонь, побудованих за рівняннями (15) і (16) відповідно при $C=0; r=3;\ R=5;$ $u\in[-2;...2];\ \ v\in[-0{,}4;...0{,}4]$.



а **б**

Рис. 1. Відсіки мінімальних поверхонь, побудованих за допомогою ізотропних кривих, які лежать на поверхні відкритого тора, заданого рівняннями (12):
а) відсік мінімальної поверхні, побудованої за рівняннями (15);
б) відсік приєднаної мінімальної поверхні, побудованої за рівнян. (16).

Коефіцієнти першої та другої квадратичних форм побудованих поверхонь (15) та (16), перетворюють вираз середньої кривини $H = \dfrac{E \cdot N - 2 \cdot F \cdot M + G \cdot L}{2(E \cdot G - F^2)}$, для кожної із указаних поверхонь, до нуля.

Висновки. За умови знаходження невизначеного інтегралу (2) на поверхні обертання, віднесеної до ізометричної сітки координатних ліній, можна побудувати чотири сім’ї ізотропних кривих. Для кожної ізотропної кривої, яка лежить на поверхні відкритого тора (кільця), можна знайти аналітичний опис відповідної мінімальної поверхні та приєднаної мінімальної поверхні.

Список використаних джерел:

1. Аушева Н.М. Моделювання поверхонь Без'є / Н.М. Аушева // Прикладна геометрія та інженерна графіка. Праці / ТДАТУ. – Вип.4, т.50. – Мелітополь: ТДАТУ, 2011.– С.105 – 109.

2. Несвидомин В.Н. Способ аналитического отображения плоских изображений на криволинейные поверхности / В.Н. Несвидомин, Т.С. Пилипака, Т.С. Кремец // An international journal on operation of farm and agri-food industry machinery «MOTROL. Commission of

Motorization and Energetics in Agriculture» / Polish academy of sciences, University of engineering and economics in Rzeszov.– Vol. 16, No 3. – Lublin – Rzeszov, 2014. – С. 58 – 65.

3. Пилипака С.Ф. Мінімальні поверхні, отримані з ізотропних кривих / С.Ф. Пилипака, Е.О. Чернишова // Збірник наукових праць КНУДТ (спецвипуск): Доповіді третьої кримської науково-практичної конференції "Геометричне та комп'ютерне моделювання: енергозбереження, екологія, дизайн". – К.: КНУТД, 2006. – С. 40 – 45.

4. Пилипака С.Ф. Конструювання мінімальної поверхні гвинтовим рухом просторової кривої / С.Ф. Пилипака, І.О. Коровіна // Праці Таврійського державного агротехнологічного університету. – Вип. 4. Прикл. геометрія та інж. графіка. – Т.39. – Мелітополь: ТДАТУ, 2008.– С. 30–36.

5. Пилипака Т.С. Аналітичний пошук поверхонь обертання, віднесених до ізометричних координат / Т. С. Пилипака, І. Ю. Грищенко, Т. С. Кремець // Прикл. геометрія та інженерна графіка. – К.: КНУБА, 2012. – № 90.– С. 229–236.

6. Фиников С.П. Теория поверхностей / Фиников С.П. – М.–Л.: ГТТИ, 1934. – 206 с.

Аннотация. В статье осуществлено аналитическое описание изотропных кривых, лежащих на поверхностях вращения, при образовании непрерывного каркаса минимальных поверхностей. Найдены параметрические уравнения изотропных кривых, лежащих на поверхности открытого тора, и построены соответствующие минимальные поверхности.

Ключевые слова: изотропная кривая, минимальная поверхность, открытый тор, линейный элемент поверхности, изометрическая сетка координатных линий.

Abstract. This article provides an analytical description of isotropic curves that lie on the surfaces of rotation, the formation of a continuous frame of minimal surfaces. Found parametric equation of isotropic curves, that lie on the surface of a open torus, visualized appropriate minimum surfaces.

Keywords: isotropic curve, minimal surface, open torus, linear element of a surface, isometric grid of a coordinate lines.