УДК 531: 534(075.8)

СТІЙКОСТЬ РУХУ АГРАРНИХ МАШИН

Литвинов О.І., Федорина Т.П., Козаченко Н.В.
Ніжинський агротехнічний інститут

У роботі надаються методи дослідження стійкості руху автономних механічних систем, які побудовані на теорії Ляпунова. Наведені приклади дослідження стійкості руху ряду аграрних машин.

Постановка проблеми. Теорія стійкості руху має важливе практичне значення для багатьох галузей техніки [1,2,3]. Вона широко застосовується в наукових дослідженнях і при розрахунках та конструюванні систем автоматичного регулювання, навігаційних приладів, літаків, космічних апаратів, різного роду двигунів тощо. Без відповідної стійкості руху ракета не може виводити супутник на розрахункову траєкторію, а машина не може якісно виконувати технологічний процес, корабель і літак – стійке зберігати заданий курс, гірокомпас – стійке показувати напрямок географічного меридіану.

Поняття стійкості трактується у широкому сенсі, як здатність об’єкту зберігати свій стан, не підпорядковуючись непередбаченим заздалегідь зовнішнім збуренням. Це поняття займає одне із центральних місць у фізиці і техніці. В залежності від характеру конкретного процесу, що розглядається, існують і різноманітні реалізації цього поняття. Особливо це стосується дослідження стійкості руху ряду аграрних машин, для яких додержання умов стійкості дозволяє забезпечити якісний перебіг технологічних процесів.

Аналіз останніх досліджень та публікацій. З середини XIX століття в науці і техніці виникли проблеми, які змусили поставити загальну задачу про стійкість не тільки рівноваги але і руху. Перш за все – це криза у двигунобудуванні, коли конструкторам довго не вдавалося стійке зберігати задану частоту обертання колінчастих валів двигунів (двигун йшов у “розліт”).

У працях Д.К. Максвелла, І.А. Вишнеградського, Е. Рауса, М.Є. Жуковського [1] розглянуто ряд загальних питань про стійкість руху. Неоціненні плідні результати містить робота О.М. Ляпунова "Загальна задача про стійкість руху", яка була опублікована в 1892 році. Ляпунов надав точне визначення стійкості руху, одержав повний розв'язок задачі для усталеного руху, запропонував два методи дослідження стійкості руху, що характеризуються простотою і ефективністю.

У наш час методи Ляпунова поглиблюються, виникають нові прикладні напрями, в яких створюються загальні методи дослідження стійкості руху окремих широких класів систем: системи автоматичного регулювання, керовані системи тощо. Бурхливий розвиток отримала теорія автоматичного керування і технічна кібернетика, де створення методів дослідження і забезпечення стійкості руху систем є однією з головних задач цих наук. Але поряд з цим недостане розвинуті подібні дослідження в галузі землеробської механіки, у якій механічні системи сільськогосподарських машин повинні забезпечити якісне виконання технологічних операцій.

Мета дослідження – розглянути критерії оцінки стійкості руху механічних систем сільськогосподарського призначення.

Результати дослідження. Розглянемо спочатку більш просте поняття про **стійкість рівноваги**. З фізичної точки зору положення рівноваги називається стійким, якщо при достатньо малих початкових відхиленнях і швидкостях система протягом руху не виходить за межі як завгодно малого околу положення рівноваги, маючи при цьому як завгодно малі швидкості.

Аналізуючи деякі найпростіші рухи з погляду заданого визначення, можна стверджувати, що кулька на вгнутій сферичній поверхні є стійкою системою, тому що вона при русі під дією достатньо малих збурювальних сил намагається знову повернутись у своє вихідне найнижче положення. У той же час кулька на опуклій поверхні в стані рівноваги не має стійкого положення, навіть при як завгодно малих відхиленнях вона не повернеться до стану рівноваги. Байдуже положення має кулька на горизонтальній поверхні.

Візьмемо другий приклад – фізичний маятник. У нижньому вертикальному положенні він має стійку рівновагу (після ряду коливань він повертається у вихідне положення спокою). У верхньому вертикальному положенні фізичний маятник посідає нестійку рівновагу: при як завгодно малому відхиленні він почне рухатись, прямуючи до стійкого нижнього положення.

Достатні умови стійкості рівноваги системи дає теорема Лагранжа-Діріхле [3]:

“Якщо в положенні рівноваги потенціальна енергія голономної стаціонарної системи, що перебуває в полі консервативних сил, має ізольований мінімум, то таке положення рівноваги є стійким”.

Для консервативної системи діє закон збереження механічної енергії:

$$T_0 + \Pi_0 = T + \Pi, \tag{1}$$

де T_0, Π_0, T, Π – кінетична і потенціальна енергія в стані рівноваги і при збуренні. Оскільки завжди $T \geq 0$, то із виразу (1) маємо

$$T = T_0 + \Pi_0 - \Pi \geq 0, \tag{2}$$

звідки

$$\Pi \leq T_0 + \Pi_0. \tag{3}$$

Нерівності (2) і (3) показують, що рух системи після відхилення її від положення рівноваги відбувається в околі положення рівноваги. Зростання потенціальної енергії обмежене нерівністю (3) настільки, що вона буде одним із значень потенціальної енергії в околі положення рівноваги. На основі (2) можна вважати, що за вказаних початкових умов швидкості всіх точок системи обмежені за модулем: із зменшенням T_0 і Π_0 до нуля, T і Π також наближаються до нуля. Теорема доведена.

Теорема Лагранжа-Діріхле дає лише достатні умови стійкості стану рівноваги. Вирішення питання про нестійкість рівноваги консервативної системи ґрунтується на двох теоремах О.М. Ляпунова [2] про нестійкість рівноваги. Суть теорем Ляпунова про нестійкість рівноваги полягає в тому, що нестійкість має місце, якщо:

1) потенціальна енергія не має мінімуму, що можна встановити за членами другого порядку в розкладенні потенціальної енергії в ряд Маклорена;

2) потенціальна енергія має максимум і це можна встановити за членами ніщого порядку мализни, що входять у ряд Маклорена.

Як відомо з аналітичних курсів механіки, вираз потенціальної енергії для голономної стаціонарної системи можна отримати у вигляді квадратичної форми в функції узагальнених координат:

$$\Pi = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} C_{k\,j} q_k q_j \,, \tag{4}$$

де C_{kj} - узагальнені коефіцієнти жорсткості (коефіцієнти ряду Маклорена); $q_1, \ldots, q_N$ - узагальнені координати системи.

У виразі (4) враховано, що узагальнені координати і потенціальна енергія в положенні рівноваги дорівнюють нулю ($q_j = 0$; $\Pi(0) = 0$). Крім того, узагальнені сили в положенні рівноваги також дорівнюють нулю:

$$\left(\frac{\partial \Pi}{\partial q_1}\right)_0 = \left(\frac{\partial \Pi}{\partial q_2}\right)_0 = 0 .$$

Оскільки в положенні рівноваги потенціальна енергія дорівнює нулю ($\Pi(0) = 0$), то вона має мінімум у цьому положенні, якщо $\Pi(\bar{q})$ буде явно додатною функцією. Знак квадратичної форми визначається теоремою Сильвестра [3].

Для додатне-визначеності квадратичної форми необхідно і достатньо, щоб усі головні діагональні мінорі матриці квадратичної форми були додатні.

Записуємо матрицю коефіцієнтів виразу (4):

$$\begin{vmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & \ldots & C_{1N} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & \ldots & C_{2N} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & \ldots & C_{3N} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ C_{N1} & C_{N2} & C_{N3} & \ldots & C_{NN} \end{vmatrix} \tag{5}$$

Складемо головні діагональні мінорі матриці (5):

$$\Delta_1 = C_{11}, \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{vmatrix}, \qquad \Delta_3 = \begin{vmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{vmatrix}, \quad \ldots \quad ,$$

$$\Delta_N = \begin{vmatrix} C_{11} & \ldots & C_{1N} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ C_{N1} & \ldots & C_{NN} \end{vmatrix}.$$

Згідно критерію Сільвестра квадратична форма є додатне-визначеною, а звідси і буде мінімум потенціальної енергії в положенні рівноваги, якщо головні діагональні мінорі матриці коефіцієнтів додатні:

$$\Delta_1 > 0, \;\; \Delta_2 > 0, \;\; \ldots, \;\; \Delta_N > 0; \tag{6}$$

Стійкість руху механічної системи, наприклад, машини, літака, снаряда тощо, залежить від діючих сил і початкових умов руху (координат і швидкостей точок системи у момент початку руху). Знаючи сили і початкові умови, можна теоретично розрахувати, як буде рухатись система. Рух, який відповідає розрахунку, називається незбуреним.

У зв'язку з деякою неточністю виміру початкових умов, їх дійсні значення, як правило, відрізняються від розрахункових. Крім того, механічна система під час руху може підпадати під випадкові впливи різних сил, що також еквівалентно змінює початкові умови. Відхилення початкових умов, що виникають із різних причин, називають початковими збуреннями, а рух, який система при цьому здійснює при наявності збурень – збуреним рухом. Як підсумок вищесказаного можна дати таке визначення.

Якщо при достатньо малих початкових збуреннях яка-небудь із характеристик руху протягом всього часу мало відрізняється від того значення, що вона повинна мати при незбуреному русі, то рух системи по відношенню до цієї характеристики називається стійким. Умови, при котрих рух механічної системи є стійким, називаються критеріями стійкості.

Розрізняють такі види стійкості: стійкість положення рівноваги і стійкість руху.

Задача про стійкість руху і означення стійкості.

Припустимо, що рух об'єкта дослідження описаний нормальною у формі Коші системою диференціальних рівнянь

$$\frac{dy_k}{dt} = Y_k(t,\ y_1,\ y_2,\ \dots,\ y_n),\ k = 1,\ 2,\ \dots,\ n, \tag{7}$$

де y_k - деякі параметри, які пов'язані з рухом, наприклад, координати, проекції швидкостей, з початковими умовами при $t = 0$:

$$y_k(t_0) = y_{k0}, \quad k = 1,\ 2,\ \dots,\ n. \tag{8}$$

Нехай деяким фіксованим початковим умовам (8) відповідає певний розв'язок системи (7):

$$y_k = f_k(t), \quad k = 1,\ 2,\ \dots,\ n, \tag{9}$$

котрий описує заданий рух, але цей рух ми можемо і не знати за неможливістю інтегрування.

Розв'язок (9), який задовольняє початковим умовам (8) і описує заданий рух, називають незбуреним рухом системи.

Надаємо далі початковим умовам y_{ko} деякі невеликі за модулем прирости δ_k, $k = 1,2,\dots,n,$ які називають початковими збуреннями. Нехай новим початковим значенням $y_{k_1} = y_{k_0} + \delta_k$ відповідає новий частинний розв'язок системи (7)

$$y_k = \varphi_k(t),\ \ k = 1,2,\dots,n. \tag{10}$$

Розв'язок (10), який отриманий з урахуванням початкових збурень δ_k, і відповідний йому рух системи називають збуреним рухом.

Виходячи із рішень (9) і (10), визначимо їх прирости:

$$\delta_{yk} = \varphi_k(t) - f_k(t) = u_k(t), \quad k = 1,2,\dots,n, \tag{11}$$

які називають варіаціями параметрів руху.

Розглянемо рух в координатах $u_1, u_2, \dots, u_n$. Простір $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ в теорії стійкості називають фазовим простором, координати u_k – фазовими координатами, а їх сукупність, яка визначає деякий стан системи, що досліджується – фазою системи.

Будь-який незбурений рух зображується у системі координат ($u_1, u_2, ..., u_n$) фіксованою точкою M_0 (0,...,0), яка співпадає з початком координат (усі $u_k \equiv 0$). Точка M_0 називається точкою рівноваги системи.

Сукупність значень $(u_1(t), ..., u_n(t))$ в довільний момент часу t визначає відповідний фазовий стан або фазу системи. Геометрична інтерпретація зміни фазових координат визначає фазову траєкторію L_k зображувальної точки M_k в n-вимірному просторі u_k з початком у точці M_0, яка відповідає початку координат при незбуреному русі.

Виходячи з викладених міркувань, означимо стійкість руху за Ляпуновим [2].

Якщо довільно заданому додатному числу ε, яким малим воно б не було, можна поставити у відповідність друге додатне число $\delta = \delta(\varepsilon)$, таке, що при будь-яких початкових збуреннях

$$\delta_1 = u_1(t_0),\ \delta_2 = u_2(t_0),\ ..., \delta_n = u_n(t_0),$$

які задовольняють при $t = t_0$ нерівності

$$|u_1(t_0)| \le \delta,\ |u_2(t_0)| \le \delta,\ ..., |u_n(t_0)| \le \delta\,,$$

для всіх $t = t_0$ виконуються нерівності

$$|u_1(t_0)| < \varepsilon,\ |u_2(t_0)| < \varepsilon,\ ..., |u_n(t_0)| < \varepsilon\,,$$

то незбурений рух називається стійким.

У плоскому фазовому підпросторі (u_1, u_2) даному означенню можна дати геометричну інтерпретацію (Рисунок 1). Фазова траєкторія L_1 точки M_1 належить стійкому руху.

Окрему групу стійких рухів утворюють асимптотичне стійкі рухи, які можна визначити таким чином.

Якщо незбурений рух системи є стійким і при цьому будь-який збурений рух при достатньо малих початкових збуреннях прямує до незбуреного руху, тобто якщо

$$\lim_{t\to\infty} \sum_{k=1}^{n} u_k^2(t) = 0\,, \tag{12}$$

то такий незбурений рух називається асимптотичне стійким рухом (траєкторія L_3 точки M_3 на Рисунок1).

У виразі (12) за міру відхилень збуреного руху від незбуреного прийнята сума квадратів фазових координат u_k. Якщо параметри руху системи не задовольняють даним означенням, то такий рух є нестійким (фазова траєкторія L_2 точки M_2 на (Рисунок1)).

Умови (12) з геометричної точки зору розуміють таким чином: при асимптотичній стійкості зображувальна точка M фазової траєкторії повинна, не виходячи за межі сфери радіуса ε, необмежено наближатись до початку координат 0 (лінія L_3 точки M_3 на Рисунок 1). Це означає, що фізична система, рух якої досліджується, намагається повернутися у свій вихідний зрівноважений стан.

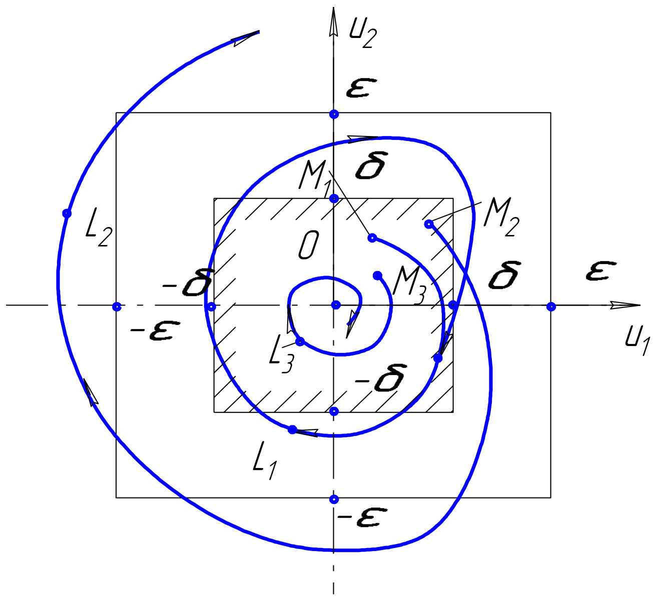

Рисунок 1. Схема до геометричної інтерпретації стійкості руху механічної системи

Особливості визначення стійкості руху за Ляпуновим:

- збурення вважаються малими;
- збуренням підлягають лише початкові умови, тобто в деякий момент часу має місце миттєва зміна параметрів руху системи, після чого її збурений рух відбувається під дією попередніх сил.

- стійкість руху розглядається на нескінченному проміжку часу.

Для дослідження збуреного руху у відповідності до його означення в системі фазових координат $u_1, u_2, \ldots, u_n$ доцільно диференціальні рівняння (7) звести до нових змінних $\delta_{y_k}(t) = u_k(t)$, де $k = 1, \ldots, n$. Підставивши у рівняння (7) параметри збуреного руху $\varphi_k = f_k + u_k$, дістанемо нову систему рівнянь:

$$\begin{aligned} \dot{u}_k &= Y_k(t, \varphi_1, \ldots, \varphi_n) - Y_k(t, f_1, \ldots, f_n) = \\ &= Y_k(t, f_1 + u_1, \ldots, f_n + u_n) - Y_k(t, f_1, \ldots, f_n) = \\ &= U_k(t, u_1, \ldots, u_n), \quad k = 1, \ldots, n \end{aligned} \tag{13}$$

Рівняння (13) в теорії стійкості руху називають диференціальними рівняннями збуреного руху.

Кожному збуреному руху досліджуваного об’єкту відповідає деякий частинний розв’язок системи (13). Відомо, що будь-якому незбуреному руху відповідають нульові значення фазових координат $u_k(t)$, тобто тривіальний розв’язок $u_1 = u_2 = \ldots = u_n = 0$ системи (13), який вона повинна мати. Для цього необхідно, щоб функції $U_k(t, u_1, \ldots, u_n)$ перетворювались в нуль при $u_1 = u_2 = \ldots = u_n = 0$.

Таким чином, дослідження на стійкість будь-якого незбуреного руху можна звести до дослідження на стійкість тривіального розв’язку системи (13). Фізичний сенс системи (13) полягає у тому, що вона визначає вектор швидкості руху зображувальної точки M вздовж фазової
траєкторії L:

$$\bar{u}_M = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\} = \{U_1, U_2, \ldots, U_n\}.$$

Рівності $U_k = U_k(t)$ можна розглядати, як параметричні рівняння руху точки.

Система (13), в якій праві частини рівнянь залежать від часу ($U_k = U_k(t)$), називається нестаціонарною або неавтономною, як і сама фізична система, рух якої дана система рівнянь описує. Відповідний рух фізичної системи є неусталеним.

Проте, у багатьох випадках праві частини рівнянь збуреного руху не залежать явно від часу:

$$\dot{u}_k = U_k(u_1, \ldots, u_n), \qquad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{14}$$

Система (14) називається стаціонарною або автономною, а її рух – усталеним. Ці системи в подальшому і розглядаються.

Припускаючи, що праві частини рівнянь (14) розкладаються в ряд Тейлора (Маклорена) по степенях $u_k(t)$, записуємо:

$$\dot{u}_k = p_{k1}u_1 + p_{k2}u_2 + \ldots + p_{kn}u_n + \overset{*}{U}_k(t, u_1, \ldots, u_n), \; k = 1, 2, \ldots, n, \tag{15}$$

де коефіцієнти $p_{ki} = p_{ki}(t) = \left(\dfrac{\partial U_k}{\partial u_j}\right)_0$ у загальному випадку є функціями часу t (для автономних систем - сталі);

$\overset{*}{U}_k$ – сукупність всіх членів розкладання вищих порядків мализни (починаючи з другого) відносно U_k.

Нехтуючи в рівняннях (15) членами вищих порядків, отримаємо лінійну однорідну систему

$$\dot{u}_k = p_{k1}u_1 + p_{k2}u_2 + \ldots + p_{kn}u_n, \quad k = 1, \ldots, n. \tag{16}$$

Приклади складання диференціальних рівнянь збуреного руху.

Приклад 1.

Коток масою m і радіусом R котиться без ковзання по горизонталі. До його центра закріплена пружина жорсткістю c. Момент інерції маси котка відносно центральної осі інерції дорівнює I_o. Скласти диференціальне рівняння збуреного руху (Рисунок 2).

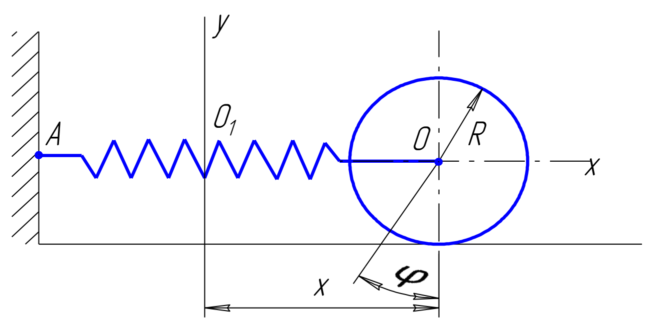

Рисунок 2. Схема до прикладу 1

Розв'язання. Приймемо за узагальнену координату відстань x від положення рівноваги O_1. Тоді кінетична енергія котка дорівнює

$$T = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 + \frac{1}{2} I_0 \dot{\varphi}^2 . \qquad (а)$$

Потенціальна енергія пружини

$$\Pi = \frac{1}{2} cx^2 . \qquad (б)$$

Рівняння Лагранжа другого роду для цієї системи має вигляд:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial T}{\partial x} = Q_x . \qquad (в)$$

Підставимо у вираз (в) відповідні похідні, а узагальнена сила при діючих потенціальних силах дорівнює $Q_x = -\frac{\partial \Pi}{\partial x} = -cx$.

Зведемо кінетичну енергію до однієї узагальненої координати, оскільки $\varphi = \frac{x}{R}$. Тоді формула (а) матиме вигляд:

$$T = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 + \frac{1}{2} I_0 \frac{\dot{x}^2}{R^2} = \frac{1}{2}\dot{x}^2\left(m + \frac{I_0}{R^2}\right). \qquad (г)$$

Частинні похідні від виразу (г):

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = \left(m + \frac{I_0}{R^2}\right)\dot{x} . \qquad (д)$$

Похідна за часом від (д):

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) = \left(m + \frac{I_0}{R^2}\right)\ddot{x} .$$

Підставимо визначені похідні у вираз (в):

$$\left(m + \frac{I_0}{R^2}\right)\ddot{x} + cx = 0 . \qquad (е)$$

Записуємо диференціальне рівняння у нормальній формі Коші:

$$\dot{x}_1 = x_2 , \quad \dot{x}_2 = \frac{-c}{\frac{I}{R^2} + m} x_1 . \qquad (к)$$

Система (к) і є диференціальним рівнянням збуреного руху.

Приклад 2. Скласти диференціальне рівняння збуреного руху симетричної причіпної сільськогосподарської машини (культиватор) масою m, яка рухається зі сталою поступальною швидкістю під дією сили сумарного опору $\overline{R}$, що проходить вздовж осі симетрії і прикладена у центрі ваги *О*. Сила $\overline{R}$ збігається з напрямом сили тяги трактора $\overline{P}$, що прикладена в точці $D(x_1, y_1)$(Рисунок 3). Момент інерції машини відносно центра ваги дорівнює I_o.

Розв'язання. Внаслідок випадкових бокових сил сумарний опір $\overline{R}$ машини змістився, виникла пара сил, під дією якої агрегат повертається проти годинникової стрілки. Частково пара сил компенсується реактивною парою ($\overline{F}, -\overline{F}$), що виникає від бокового опору коліс і робочих органів.

Машина перебуває під дією сумарного збуреного моменту:

$$M = R \cdot r - F \cdot l\,, \tag{а}$$

де r – зміщення сили $\overline{R}$ від лінії симетрії; l – плече реактивної пари ($\overline{F},-\overline{F}$).

Обмежуючись малим кутом Θ, який приймемо за узагальнену координату, будемо вважати

$F = Rtg\Theta \approx R\Theta$.

Тому рівняння (а) буде мати вигляд:

$$M = R(r - l\Theta). \tag{б}$$

Записуємо рівняння в'язі, як відстань, що завжди зберігається між точкою причепа $D(x_1, y_1)$ і центром ваги $M(x, y)$, l_0 – відстань між вказаними точками:

$$(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 = l_0^2. \tag{в}$$

Оскільки $x_1 = 0$, $y_1 = v_0 t + l$, то рівняння (в) зміниться:

$$x^2 + (v_0 t + l_0 - y)^2 = l_0^2. \tag{г}$$

Декартові координати центра ваги через узагальнену координату Θ дорівнюють:

$x = l_0 \sin\Theta$,

$$y = v_0 t + l_0(1 - \cos\Theta). \tag{д}$$

Взявши похідну за часом від виразу (д), маємо:

$$\dot{x} = l_0\dot{\Theta}\cos\Theta; \quad \dot{y}_0 = v_0 + l_0\dot{\Theta}\sin\Theta. \tag{е}$$

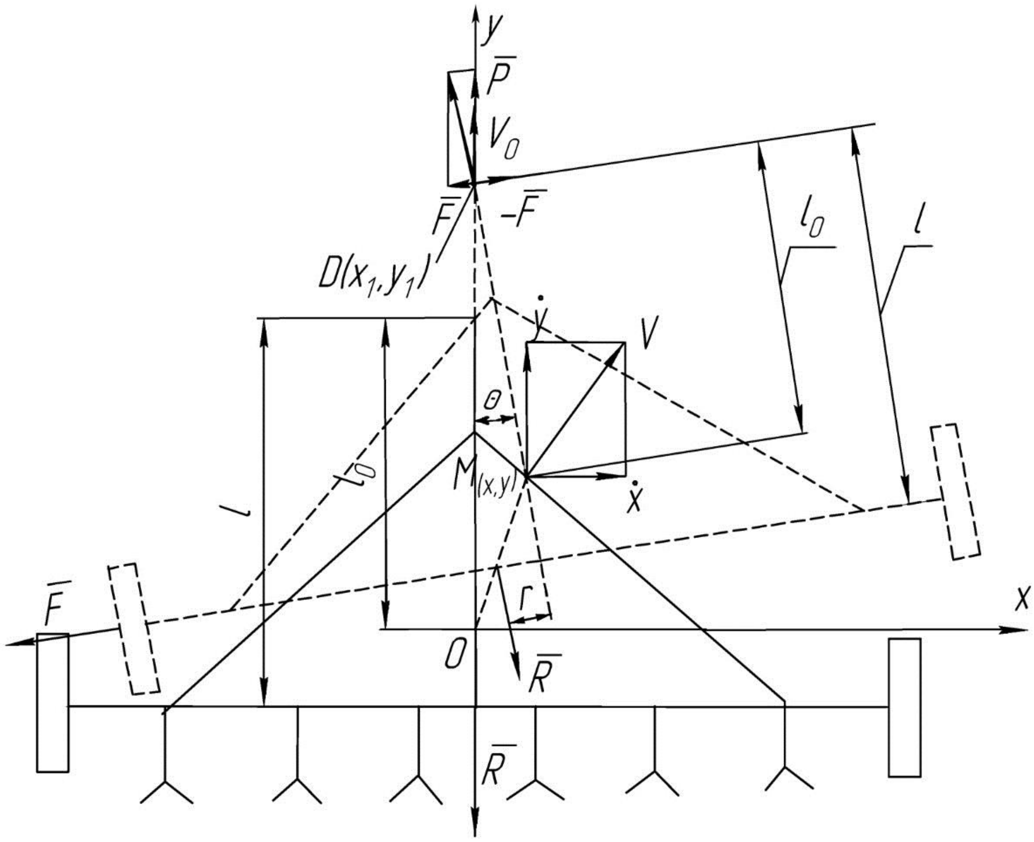

Рисунок 3. Збурений рух моделі культиватора. Схема до прикладу 2

Машина є системою з одним ступенем вільності, тому рівняння Лагранжа можна записати так:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\Theta}}\right)-\frac{\partial T}{\partial \Theta}=Q_{\Theta}, \tag{ж}$$

де T – кінетична енергія, Q_{Θ} – узагальнена сила, $\dot{\Theta}$ – узагальнена швидкість.

Визначимо кінетичну енергію машини:

$$T=\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}I_0\dot{\Theta}^2=\frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2\right)+\frac{1}{2}I_0\dot{\Theta}^2. \tag{з}$$

Підставляючи в (з) вираз (е), маємо:

$$T=\frac{1}{2}m\left(l_0^2\dot{\Theta}^2+v_0^2+2v_0l_0\dot{\Theta}\sin\Theta\right)+\frac{1}{2}I_0\dot{\Theta}^2. \tag{к}$$

Знайдемо частинні похідні з виразу (к):

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\Theta}} = \left(ml_0^2 + I_0\right)\dot{\Theta} + mv_0 l_0 \sin\Theta; \qquad \frac{\partial T}{\partial \Theta} = mv_0 l_0 \cos\Theta \cdot \dot{\Theta}.$$

Для визначення узагальненої сили Q_Θ записуємо вираз елементарної роботи прикладених сил на можливих переміщеннях точок системи:

$$\delta A = M\delta\Theta = R(r - l\Theta)\delta\Theta, \quad \text{звідки} \quad Q_\Theta = R(r - l\Theta).$$

Підставляючи у вираз (ж) всі знайдені величини, маємо:

$$\left(ml_0^2 + I_0\right)\ddot{\Theta} = R(r - l\Theta),$$

$$\ddot{\Theta} + \lambda^2\Theta = \lambda^2 k, \tag{и}$$

де $\lambda = \sqrt{\dfrac{Rl}{ml_0^2 + I_0}}; \quad k = \dfrac{r}{l}.$

Рівняння (и) і є диференціальним рівнянням збуреного руху причіпної машини. Зведемо його до нормальної форми Коші:

$$\dot{x}_1 = x_2;$$

$$\dot{x}_2 = -\lambda^2 x_1 + \lambda^2 k.$$

Методи дослідження стійкості руху системи

Якщо диференціальне рівняння руху інтегрується у замкнутому вигляді, то дослідження руху на стійкість відбувається без ускладнень. Але такі випадки практично дуже рідкі. Попередники Ляпунова користувались звичайно методом лінеаризації рівнянь руху. Зміст його полягає у заміні рівнянь (13) досліджуваної системи на лінійну систему (16). Розв’язання задачі суттєво спрощувалось, особливо для автономних систем, рівняння руху яких інтегруються у замкненому вигляді і при сталих коефіцієнтах $p_{kj} = a_{kj} = const$ буде мати вигляд:

$$\dot{u}_k = a_{k_1}u_1 + a_{k_2}u_2 + \ldots + a_{k_n}u_n, \quad k = 1, \ldots, n. \tag{17}$$

Проте, подібна заміна означає заміну однієї задачі іншою. Хоча дослідження за лінійним, або першим наближеним, іноді і вірно розв’язує задачу, в інших випадках цей метод веде до невірних висновків.

Які ж умови достовірності відповіді, отриманої на підставі дослідження стійкості руху за першим наближенням?

Вперше відповідь на це запитання дав Ляпунов [2]. Він отримав повний розв'язок задачі для усталених і періодичних, а також для широкого класу неусталених рухів. Він розглянув також деякі основні випадки, коли першим наближенням обмежуватись не можна.

Всі методи дослідження руху на стійкість Ляпунов поділив на дві категорії:

- перший метод, який стосується систем, рух яких описується нелінійними диференціальними рівняннями, побудований на дослідженні лінеаризованих рівнянь збуреного руху або диференціальних рівнянь першого наближення;
- другий (прямий) метод, пов'язаний із побудовою спеціальних функцій Ляпунова, які мають властивості, на основі яких можна скласти висновок про стійкість руху без розв'язування диференціальних рівнянь.

Дослідження стійкості руху за першим наближенням. Теореми Ляпунова. Розглянемо лінеаризовану систему першого наближення (17) у розгорнутому вигляді, замінюючи $u_k = x_k$**:**

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \frac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n, \\ \dot{x}_2 &= \frac{dx_2}{dt} = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n, \\ &\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \\ \dot{x}_n &= \frac{dx_n}{dt} = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n. \end{aligned} \tag{18}$$

Нагадаємо, що для автономної системи, яка тут розглядається, всі коефіцієнти рівнянь (18) a_k – сталі числа. Як відомо, частинний розв'язок лінійних систем шукають у вигляді:

$$x_1 = A_1 e^{\lambda t}, \quad x_2 = A_2 e^{\lambda t}, \; \ldots, \quad x_n = A_n e^{\lambda t}. \tag{19}$$

Підставимо розв'язок (19) у рівняння (18) і після групування членів матимемо:

$$\begin{aligned}
&(a_{11}-\lambda)A_1 + a_{12}A_2 + \ldots + a_{1n}A_n = 0\ ; \\
&a_{21}A_1 + (a_{22}-\lambda)A_2 + \ldots + a_{2n}A_n = 0\ ; \\
&\ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots \\
&a_{n1}A_1 + a_{n2}A_2 + \ldots + (a_{nn}-\lambda)A_n = 0\ .
\end{aligned} \tag{20}$$

Для того, щоб система алгебраїчних рівнянь (20) мала розв’язок, який відмінний від нуля, необхідно, щоб її визначник дорівнював нулю:

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0. \tag{21}$$

Визначник (21), який складений для системи (18), називається характеристичним. Розкриваючи цей визначник за елементами першого рядка, отримаємо рівняння відносно λ, яке називається характеристичним і містить невідоме λ в степені n, маючи корені ($\lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots,\ \lambda_n$).

Сформулюємо основні умови на підставі теорем Ляпунова про стійкість за першим наближенням:

1. Якщо дійсні частини всіх коренів характеристичного рівняння від’ємні, то незбурений рух асимптотичне стійкий.
2. Якщо серед коренів характеристичного рівняння є хоча б один, дійсна частина якого додатна, то незбурений рух є нестійким.
3. Якщо дійсні частини деяких коренів характеристичного рівняння дорівнюють нулю, а дійсні частини інших коренів від’ємні, то незбурений рух є стійким, але не асимптотичне стійким.

Наведені теореми Ляпунова про стійкість руху за першим наближенням повністю розв’язують задачу про стійкість руху.

Критерій Гурвіца. Із вищесказаного зрозуміло, що для висновку про стійкість руху системи велике значення має питання про знак дійсних частин коренів характеристичного рівняння. Тобто, важливо знати необхідні і достатні умови, при яких корені рівняння мають від’ємні дійсні частини. Такі умови повинні задовольняти критерій Гурвіца.

Розкриємо визначник (21), групуючи члени за степенями λ:

$$a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0. \tag{22}$$

Для визначення стійкості руху за рівняннями першого наближення необхідно наперед знати, коли дійсні частини усіх коренів характеристичного рівняння будуть від’ємними, не розв’язуючи характеристичного рівняння, не обчислюючи його корені. Для цього будують із коренів характеристичного рівняння a_o, a_1, ..., a_n (22) матрицю Гурвіца:

$$\begin{Vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \ldots & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & \ldots & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a_n \end{Vmatrix}. \tag{23}$$

Складемо із матриці (23) головні діагональні мінорі:

$$\Delta_1 = a_1; \;\; \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix}; \; \ldots \; ; \;\; \Delta_n = a_n \Delta_{n-1}. \tag{24}$$

Для того, щоб всі корені характеристичного рівняння (22) мали від’ємні дійсні частини, необхідно і достатньо, щоб всі головні діагональні мінорі (24) були додатними, тобто:

$$\Delta_1 > 0; \;\; \Delta_2 > 0; \;\; \ldots, \;\; \Delta_{n-1} > 0; \;\; \Delta_n > 0. \tag{25}$$

Приклад 3. Скласти рівняння першого наближення математичного маятника довжиною l, кут відхилу від вертикалі φ (Рисунок4)

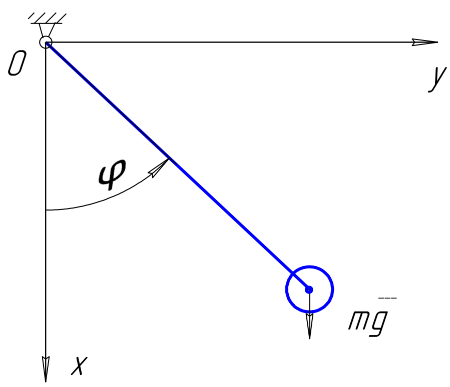

Рисунок 4. Схема до прикладу 3

Розв'язання. Коливання математичного маятника описуються диференціальним рівнянням:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{g}{l}\sin\varphi .$$

(а)

Початкові умови: $\varphi(0) = \alpha$; $\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)_0 = 0$. (б)

Частинний розв’язок рівняння (а) шукаємо у формі

$$\varphi = f(t), \qquad (в)$$

де $f(t)$ – деяка періодична функція.

Тоді незбурений рух описується рівнянням:

$$\frac{d^2 f(t)}{dt^2} = -\frac{g}{l}\sin f(t). \qquad (г)$$

Збурений рух характеризується кутом

$$\varphi = f(t) + x . \qquad (д)$$

Підставимо (д) у вираз (а) і отримаємо:

$$\frac{d^2 f(t)}{dt^2} + \frac{d^2 x}{dt^2} = -\frac{g}{l}\sin\left(f(t) + x\right).$$

Диференціальне рівняння збуреного руху

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\frac{g}{l}\sin\left(f(t) + x\right) + \frac{g}{l}\sin f(t). \qquad (е)$$

Розкладемо рівняння (е) в ряд по степенях x:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\frac{g}{l}x\cos f(t) + \frac{g}{2l}x^2\sin f(t) + \ldots \qquad (ж)$$

Відкидаючи нелінійні члени, отримаємо із (ж) рівняння першого наближення

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\frac{g}{l}x\cos f(t). \qquad (з)$$

Записуємо рівняння (з) в вигляді системи двох рівнянь в формі Коші:

$\dot{x}_1 = x_2$; $\dot{x}_2 = -\frac{g}{l}x_1\cos f(t).$

Прямий метод Ляпунова. Функції Ляпунова. Дослідження стійкості руху автономних систем

Прямий або другий метод Ляпунова характеризується тим, що при його застосуванні не потрібно інтегрувати диференціальні рівняння збуреного руху. Цей метод пов'язаний з пошуком деяких функцій V змінних збурення t, x_1, x_2, ..., x_N, де $x_j = y_j - f_j(t)$ – збурення, y_j – частинний розв'язок збуреного руху, $f_j(t)$ – частинний розв'язок незбуреного запрограмованого руху (основного). Метод пов'язаний також з вивченням властивостей цих функцій, які називаються функціями Ляпунова, і властивостей їх похідних. Розглянемо лише усталений (стаціонарний) рух (автономні системи), для яких $V = V(x_1,\ x_2,\ ...,\ x_N)$ в околі $|x_j| < h(j = 1,\ 2,\ ...,\ N)$, де h – достатньо мале додатне число, вважаючи ці функції безперервно диференційованими, однозначними і такими, що перетворюються на нуль на початку координат $x_{1o} = x_{2o} = ... = x_{No} = 0$.

У теорії стійкості прямий метод вважається основним. Він є якісним методом, оскільки не потребує отримання розв'язку рівнянь руху, а розглядає властивості „пробних" функцій, тобто функцій Ляпунова.

Найпростішим прикладом „пробної" функції може слугувати вираз потенціальної енергії системи, за допомогою якого можна встановити стійкість або нестійкість рівноваги.

Похідна функції Ляпунова визначається з виразу:

$$\frac{dV}{dt} = \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial V}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial t}. \tag{26}$$

Крім цього, функції Ляпунова можуть мати спеціальні властивості.

Функцію V називають додатне-визначеною в околі $|x_j| < h$, якщо в будь-якій точці цього околу, крім початку координат (де функція V дорівнює нулю), виконується умова $V > 0$.

Якщо $V < 0$, то функція V називається від'ємне-визначеною. У цих двох випадках функція V називається знако-визначеною.

Якщо в цьому околі $\left|x_j\right| < h$ функція V набуває значення тільки одного знака ($V \geq 0$ або $V \leq 0$), але може перетворюватись на нуль не тільки на початку координат, то вона називається знако-сталою (додатною чи від'ємною); якщо ж функція V набуває як додатного, так і від'ємного значень, то вона називається знакозмінною в цьому околі.

Наприклад, функція $V = x_1^2 - x_2^2$ при $N = 2$ - знакозмінна, а функція $V = x_1^2 + x_2^2$ – додатно-визначена, функція $V = x_1^2$ – знако-стала, бо вона перетворюється на нуль на осі Ox_2, а поза межами цієї осі вона додатна.

Отже, якщо V є квадратичною формою, то знако-визначеність можна встановити за допомогою критерію Сильвестра. Якщо V – форма непарного степеню, то зрозуміло, вона є знакозмінною функцією.

Таким чином, функціями Ляпунова називаються функції змінних $x_1,\ x_2,\ \ldots, x_N$, кожна з яких в деякій n-вимірній області, що містить початок координат простору, є знако-визначеною, знако-сталою або знакозмінною і має в цій області неперервні частинні похідні першого порядку за змінними $x_1,\ x_2,\ \ldots, x_N$, тобто має повний диференціал.

Питання про стійкість незбуреного руху розв'язується на підставі дослідження поведінки функції $V\,(x_1,\ x_2,\ \ldots, x_N)$ і їх похідних за часом. При цьому необхідно враховувати, що змінні $x_1,\ x_2,\ \ldots, x_N$ є розв'язками диференціальних рівнянь збуреного руху. Вивчення поведінки функції V вздовж траєкторії руху системи дозволяє зробити висновок про поведінку траєкторій механічної системи, яка досліджується, тобто розв'язати питання про стійкість або нестійкість руху.

Оскільки питання про знако-визначеність квадратичної форми розв'язується досить просто (критерій Сильвестра (6)), то при побудові функцій Ляпунова за основу вибирають знако-визначену квадратичну форму і при необхідності додають форми вищих порядків. Отримана функція матиме ті ж властивості знако-визначеності, що і вихідна квадратична форма.

Приклад 4. Розглянемо функцію:

$$V = 1 + \sin^2 x_1 - \cos(x_1 - x_2).$$

Розкладемо цю функцію в ряд по степенях x_1 і x_2:

$$\sin^2 x_1 = x_1^2 + \ldots; \;\; \cos(x_1 - x_2) = 1 - \frac{1}{2}(x_1 - x_2)^2 + \ldots,$$

де точками позначені члени, які містять x_1 і x_2 у степені вище другої. Вносячи ці розкладання у функцію V, отримаємо:

$$V = 1 + x_1^2 - 1 + \frac{1}{2}(x_1 - x_2)^2 + \ldots ,$$

$$V = \frac{1}{2}\left(3x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2\right) + \ldots .$$

Складемо матрицю коефіцієнтів квадратичної частини функції V (вздовж головної діагоналі розташовані коефіцієнти при квадратах змінних), елементи C_{12} і C_{21} дорівнюють половині коефіцієнта при добутку x_1x_2.

$$\begin{Vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Обчислимо головні діагональні мінорі: $\Delta_1 = 3, \;\; \Delta_2 = 3 - 1 = 2$.

Оскільки $\Delta_k > 0$, тоді, згідно критерію Сільвестра (6), функція V є додатне-визначеною.

Теореми Ляпунова для прямого методу. Теорема про стійкість руху. Якщо для системи диференціальних рівнянь збуреного руху існує така знако-визначена в області $x_j < h$ функція V $(x_1, \; x_2, \; \ldots, x_N)$, що її повна похідна за часом $\dot{V}$ на основі цих рівнянь є знакосталою протилежного з функцією V знаку, або тотожно рівною нулю, то незбурений основний рух є стійким.

Нехай функція $V\,(x_1, \; x_2, \; \ldots, x_N)$ є знаковизначеною додатною, а, виходячи з умов теореми, повна похідна від функції V за часом, яка взята на основі рівнянь збуреного руху, є знакосталою і від’ємною, то основний незбурений рух є стійким.

$$\frac{dV}{dt}=\sum_{j=1}^{N}\frac{\partial V}{\partial x_j}\frac{dx_j}{dt}\le 0\,.$$

Теорема про асимптотичну стійкість руху. Якщо диференціальні рівняння збуреного руху такі, що існує знако-визначена функція $V\left(x_1,\ x_2,\ ...,x_N\right)$, похідна якої $\dot{V}$ на основі цих рівнянь є знако-визначеною функцією протилежного із V знаку, то незбурений (основний) рух є асимптотичне стійким.

Перша теорема Ляпунова про нестійкість руху. Якщо для диференціальних рівнянь збуреного руху існує така функція V $\left(x_1,\ x_2,\ ...,x_N\right)$, похідна від якої на основі цих рівнянь є знако-сталою функцією, а сама функція V не є знако-сталою протилежного знаку, то незбурений (основний) рух є нестійким.

Друга теорема Ляпунова про нестійкість руху. Якщо для диференціальних рівнянь збуреного руху існує така функція V, що її похідна $\dot{V}$ на основі цих рівнянь може бути подана у формі:

$\dot{V}=\alpha V+W$,

де α – додатна стала $(\alpha>0)$, а W – тотожно перетворюється на нуль або є знако-сталою функцією, і якщо в останньому випадку функція V не є знако-сталою, протилежною із W знаком, то незбурений рух є нестійким.

Приклад 5. Дослідимо прямим методом Ляпунова стійкість руху моделі автомобіля масою m і моментом інерції відносно поперечної осі, що проходить через центр мас $C-mr^2$, де r – радіус інерції кузова, $C_П$, $C_З$ – коефіцієнти жорсткості передніх і задніх ресор (Рисунок 5).

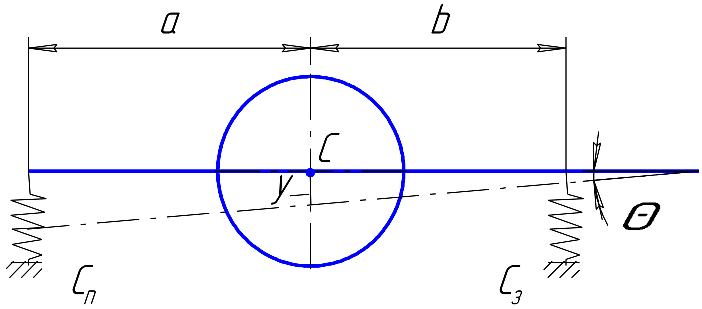

Рисунок 5. Коливальна система автомобілю. Схема до прикладу 5

Розв'язання. Розглянемо повздовжні коливання автомобіля. В процесі коливань його положення визначається двома узагальненими координатами: вертикальним переміщенням y центра ваги (точки С) і кутом повороту рами Θ. Кінетична енергія автомобіля дорівнює:

$$T = \frac{1}{2}m\dot{y}^2 + \frac{1}{2}I_c\dot{\Theta}^2 = \frac{1}{2}m\left(\dot{y}^2 + r^2\dot{\Theta}^2\right).$$

Потенціальна енергія деформації ресор:

$$П = C_n\left(y + a\Theta\right)^2 + C_3\left(y - b\Theta\right)^2.$$

Рівняння Лагранжа другого роду:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{y}}\right) - \frac{\partial T}{\partial y} = -\frac{\partial П}{\partial y};$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\Theta}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \Theta} = -\frac{\partial П}{\partial \Theta}.$$

Підставляючи в рівняння похідну від T і $П$, отримаємо диференціальні рівняння коливального руху автомобіля:

$$m\ddot{y} + 2C_{\Pi}\left(y + a\Theta\right) + 2C_3\left(y - b\Theta\right) = 0;$$

$$mr^2\ddot{\Theta} + 2C_{\Pi}\left(y + a\Theta\right)a + 2C_3\left(y - b\Theta\right)b = 0.$$

Подаємо диференціальні рівняння у нормальній формі Коші:

$$\dot{x}_1 = x_2;\ \ \dot{x}_2 = -\frac{1}{m}\left(2C_{\Pi}\left(x_1 + ax_3\right) + 2C_3\left(x_1 - bx_3\right)\right);$$

$$\dot{x}_3 = x_4;\ \ \dot{x}_4 = -\frac{1}{mr^2}\left(2C_{\Pi}\left(x_1 + ax_3\right)a + 2C_3\left(x_1 - bx_3\right)b\right).$$

Це диференціальні рівняння збуреного руху автомобіля.

Виберемо функцію Ляпунова у формі повної механічної енергії:

$$V = T + П = \frac{1}{2}m\left(\dot{y}^2 + r^2\dot{\Theta}^2\right) + C_{\Pi}\left(y + a\Theta\right)^2 + C_3\left(y - b\Theta\right)^2.$$

Записуємо функцію Ляпунова в нових змінних

$$V = \frac{1}{2}m\left(x_2^2 + r^2x_4^2\right) + C_{\Pi}\left(x_1 + ax_3\right)^2 + C_3\left(x_1 - bx_3\right)^2.$$

Візьмемо повну похідну від функції Ляпунова за часом:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x_1}\dot{x}_1 + \frac{\partial V}{\partial x_2}\dot{x}_2 + \frac{\partial V}{\partial x_3}\dot{x}_3 + \frac{\partial V}{\partial x_4}\dot{x}_4.$$

В силу рівнянь збуреного руху маємо $\frac{dV}{dt} = 0$ (рух стійкий).

Висновки. Стійкість руху, як можна побачити з роботи, є одною із найважливіших категорій теоретичної механіки, теорії механізмів і машин, а теорія стійкості руху відіграє велику роль у дослідженнях різного роду механічних систем. Серед різних факторів важливо знати критерії стійкості руху, щоб оцінити, як буде рухатись система у подальшому, якщо вона випадково підпаде під вплив сил, що не враховані в моделі. Останнє еквівалентно зміні початкових умов, від яких безпосередньо залежить характер руху. Розглянуті методи і приклади надають змогу розглянути поведінку механічної системи без розв'язання складних диференціальних рівнянь руху при наявності збурень.

Література

1. Жуковский М.Е. О прочности движений. Собр. соч. – М.: ОГИЗ, 1948. – Т.1. – с.69–70.

2. Ляпунов А.М. Общая задача об устойчивости движения.– М.:Гостехиздат, 1950.– 472 с.

3. Малкин И.Г. Теория устойчивости движения. – М.: Наука, 1966. – 532 с.