УДК.519.21

МОДЕЛЮВАННЯ РОЗПОВСЮДЖЕННЯ ДОМІШОК У СЕРЕДОВИЩІ З ЦЕНТРАМИ ЗАТРИМКИ, ЗА ДОПОМОГОЮ ІНДИКАТОРНИХ ФУНКЦІЙ

Дубко В. О. доктор ф-м.н., проф, заф. каф. прикладної математики і моделювання
ВП НУБіП Ніжинський агротехнічний інститут.

Анотація. *У якості моделі дифузії у гранульованому середовищі, на масштабах, коли гранульоване середовище можна трактувати як статистично однорідне, пропонується модель броунівського руху з випадковими тимчасовими зупинками.*
Ключові слова: *вінерівський процес, процес Пуассона, змінна структура.*

Вступ. Грунт - локально неоднорідне середовище, яке складається з твердих гранул різних розмірів і простору між ними (пор), заповненим газом, рідиною [2]. Особливістю хаотичного руху частинок у такому середовищі є затримки пов'язані, наприклад, із прилипанням у випадковий момент часу, на деякий випадковий проміжок часу, до гранул. Якщо ж розглядати процеси дифузії для просторових масштабів, які значно перевищують середній розмір пор, а відповідно і гранул, то грунт можна трактувати як статистично однорідне середовище, суттєві зміни осереднених характеристик якого відбуваються лише на таких масштабах.

Моделювання процесу затримки. Випадковість моменту зупинки руху частики (поглинання) та момент поновлення руху, будемо моделювати за допомогою допоміжного випадкового процесу, якому ми дамо назву індикаторного.

Індикаторним випадковим процесом (ІВП) назвемо стрибкоподібну випадкову величину $\chi(t)$, яка може приймати, на розділених між собою інтервалами часу, лише два значення: 0 або 1.

З означення $\chi(t)$ випливає, що

$$\forall t,\ \chi^{\alpha}(t) = \chi(t),\ \forall \alpha > 0. \qquad (1)$$

Розглянемо $\chi(t)$, $\chi(0)=1$, як функцію від неспадної, цілочисельної випадкової величини $N(t)$ з незалежними приростами:

$$\chi(t) = \chi(N(t))$$

Якщо

$$\chi(N(t)) = \chi(N(t) + 2k), \qquad (2)$$

коли $k \in N^{+}$ (простору додатних цілих), то $\chi(t)$ назвемо *умовно періодичним.*

Умовам (1), (2) задовольняє функція:

$$\chi(t) = \chi(N(t)) = \frac{1}{2}(1 + \cos[N(t)\pi]). \qquad (3)$$

Бачимо, що для парних $N(t): \frac{1}{2}(1 + \cos[N(t)\pi])=1$. Для непарних $N(t)$: $\frac{1}{2}(1 + \cos[N(t)\pi])=0$.

Процеси дифузії, при наявності центрів випадкового поглинання (переривання дифузії), із подальшим відновленням процесу («сірі» центри поглинання) моделюємо за допомогою рівнянь:

$$dx(t) = \chi(t)[a(x(t);t)dt + B(x(t);t)dw(t)], \qquad (4)$$

де, в загальному випадку, $x(t), a(x(t);t) \in R^{n}$, $w(t) - m$- вимірний вінерівський процес з незалежними компонентами, $B(x(t);t)$ - матриця $(n \times m)$.

Поверхневій дифузії відповідає система рівнянь (4) в R^2, а об'ємній – в R^3.

Нашою метою є дослідити якісний характер перехідних процесів, пов'язаних з рівнянням (4). Тому, з метою спрощення записів, мотивування етапів доведення, обмежимось одновимірним рівнянням, з представленням (3) для $\chi(t)$:

$$dx(t) = \frac{1}{2}(1 + \cos[N(t)\pi])[a(t)dt + b(t)dw(t)], \qquad (5)$$

де, відповідно, $x(t), a(t), b(t), w(t) \in R$; $N(t)$ і $w(t)$- незалежні випадкові процеси.

Прикладом $N(t)$ може слугувати однорідний пуассонівський процес: $\mathrm{M}[N(t)] = \mu t$. Якщо ж при моделюванні врахувати, що середній інтервал часу знаходження частинки в стані спокою і руху різни, то у якості $N(t)$ можна вибрати, наприклад, процес:

$$N(t) = N_1(t) N_2(t),$$

де, $N_1(t)$, $N_2(t)$ - незалежні пуассонівські процеси, для яких $\mathrm{M}[N_1(t)] = \mu_1 t$, $\mathrm{M}[N_2(t)] = \mu_2 t$

Дійсно, ймовірність парності $N(t)$ визначається з рівності:

$$P(\{N(t)\,|\,парне\} =$$
$$= 1 - P(\{N_1(t)\,|\,непарне\}\, P(\{N_2(t)\,|\,непарне\}).$$

Тобто, ймовірність перебування чистики у русі буде більшою за ймовірність перебування у стані спокою. Якщо ситуація протилежна, то переходимо до $\tilde{\chi}(t) = \chi(N(t)+1)$.

Обмежимось, далі, спрощеним випадком рівняння (5):

$$dx(t) = \frac{1}{2}(1+\cos[N(t)\pi])bdw(t)\,,\, x(0)=0\,. \tag{6}$$

Застосувавши формулу Іто, врахувавши (1), рівняння (6) і скориставшись явним виглядом розподілу Пуассона[1], після усереднення, яке символічно позначатимемо $\langle\bullet\rangle$, отримуємо:

$$D(t) = \frac{d\left\langle x^2(t)\right\rangle}{dt} = b^2\frac{1}{2}\left\langle(1+\cos[N(t)\pi])\right\rangle =$$
$$= b^2\frac{1}{4}[4-(1-e^{-2\mu_1 t})(1-e^{-2\mu_2 t})].$$

де b^2 - коефіцієнт дифузії при відсутності «сірих» центрів.

З останньої рівності слідує, що $D(0)=b^2$, $D(\infty)=b^2\frac{3}{4}$.

Якщо ж, $N(t)$ - звичайний процес Пуассона, то можна

перевірити, що $D(0)=b^2$, $D(\infty)=b^2\frac{1}{2}$.

Зауваження 1. Відмітимо, що використання $\chi(t)$, дозволяє моделювати випадкові динамічні процеси зі стрибкоподібною змінною структури. Наприклад ,

$$\frac{dx(t)}{dt} = \chi(t)a_1(x(t);t) + (1-\chi(t))a_2(x(t);t)\,.$$

Можливо моделювати і рух із переходами з одного підпростору в інший:

$$\begin{cases} \dfrac{dx(t)}{dt} = \chi(t)a_1(x(t);y(t)t) \\ \dfrac{dy(t)}{dt} = (1-\chi(t))a_2(x(t);y(t);t) \end{cases},$$

і т.д., і т.п..

Зауваження 2. Відмінність ймовірностей для парних і непарних $N(t)$, зумовлена тим, що $N(0)=0$, тобто, $N(t)$ починається не з непарного числа. Це веде до неспівпадіння аналітичні виразів для ймовірностей:

$$P(\{N(t)\,|\,парне\}) = e^{-\mu t}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(\mu t)^{2j}}{(2j)!} = e^{-\mu t}\mathrm{ch}(\mu t) = \frac{1}{2}(1+e^{-2\mu t});$$

$$P(\{N(t)\,|\,непарне\}) = e^{-\mu t}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(\mu t)^{2j+1}}{(2j+1)!} =$$

$$= e^{-\mu t}\mathrm{sh}(\mu t) = \frac{1}{2}(1-e^{-2\mu t}) = 1 - P(\{N(t)\,|\,парне\}).$$

Рівність цих виразів є лише асимптотичною:

$$\lim_{t\to\infty}P(\{N(t)\,|\,парне\}) = \lim_{t\to\infty}P(\{N(t)\,|\,непарне\}) = \frac{1}{2}.$$

Висновки. Наведені приклади показують, що якщо у однорідному середовищі спостерігатимемо нелінійну залежність від часу середнього для квадрата зміщення частики, та асимптотичне зменшення коефіцієнта дифузії, то можна зробити висновок, що існують тимчасової центри затримки. Відмітимо, що використання індикаторного випадкового процесу дозволяє моделювати не тільки явище випадкової затримки руху частики, але і широкий клас динамічних систем із змінною структурою, рух із переходами у різні підпростори.

Література.

1. Гихман И.И., СкороходА.В. Стохастические дифференциальные уравнения. Киев: Наук.думка, 1968.352 с.
2. Ишанходжаева М.М. Физическая химия. Дифффузия в системах с твердой фазой. СПбГТУРП-СПб, 2012. 35 с.

Abstract. *As a model of diffusion in a granular medium, on a scale where the granular medium can be interpreted as statistically homogeneous, a Brownian motion model with random temporal stops is proposed.*

Key words: *Wiener process, Poisson process, variable structure.*