

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Дубко В.А, Нестеренко Т.В. Исследование одного класса уравнений Ито билинейного типа и их решений // Препринт № 10-96,- Хабаровск: Ин-т прикладной математики ДВО РАН, 1996 - 9с.
2. Ciganik Marek. Tok informacji a jego ovladanie. - Jn: Bibliogr. sp.1966. Martin, 1967, p. 56-82.
3. Межуева Т.И. Применение оптимальных экономико-математических моделей для решения производственных задач: Изд. ДВГСА, 2009. – С.81 – 85.

УДК 514.18

АНАЛІТИЧНИЙ ОПИС МІНІМАЛЬНИХ ПОВЕРХОНЬ ЗА ДОПОМОГОЮ ІЗОТРОПНИХ КРИВИХ, ЯКІ ЛЕЖАТЬ НА ПОВЕРХНЯХ ОБЕРТАННЯ

Пилипака С.Ф., (м. Київ, Україна), Муквич М.М., (м. Ніжин, Україна)

Аннотация. Статья посвящена разработке метода аналитического описания минимальных поверхностей с помощью изотропных кривых, лежащих на поверхностях вращения, отнесенных к изометрической сети координатных линий.

Ключевые слова: минимальная поверхность, изометрическая сеть координатных линий, линейный элемент поверхности, конус, изотропная кривая.

Анотация. Стаття присвячена розробці методу аналітичного опису мінімальних поверхонь за допомогою ізотропних кривих, що лежать на поверхнях обертання, віднесених до ізометричної мережі координатних ліній.

Ключові слова: мінімальна поверхню, ізометрична мережа координатних ліній, лінійний елемент поверхні, конус, ізотропна крива.

Abstract. The article is devoted to the development of the method of analytical description of minimal surfaces by means of isotropic curves lying on the surface of rotation, referred to the isometric grid of the coordinate lines.

Key words: minimal surface, isometric grid of the coordinate lines, linear element of a surface, cone, isotropic curve.

Постановка проблеми. Конструювання та аналітичний опис мінімальних поверхонь є важливою проблемою неперервного геометричного моделювання, зумовленою їх використанням при конструюванні поверхонь технічних форм та архітектурних конструкцій. До мінімальних поверхонь приводить геометрична задача: знайти поверхню, яка проходить через замкнену криву і має найменшу площу [1]. Перші дослідження мінімальних поверхонь були здійснені Ж. Лагранжем (J. Lagrange), який розглянув задачу [1]: «Знайти поверхню найменшої площі, яку «натягнуто» на заданий контур» (1786 р.). Задаючи поверхню у вигляді $z = z(x, y)$, Ж. Лагранж зробив висновок – функція $z = z(x, y)$ повинна задовольняти рівняння Ейлера-Лагранжа [1]:

$$(1 + q^2) \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2pq \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + (1 + p^2) \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0, \quad \text{де: } p = \frac{\partial z}{\partial x}; q = \frac{\partial z}{\partial y}. \quad (1)$$

Г. Монж (G. Monge) у 1776 году визначив, що умова мінімальності площі приводить до умови рівності нулю середньої кривини поверхні.

Проблема аналітичного опису мінімальних поверхонь, які застосовуються при проектуванні поверхонь технічних форм та архітектурних конструкцій, стимулює

розвиток багатьох областей математики: теорії міри, функціонального аналізу, топології, теорії функцій комплексної змінної, теорії диференціальних рівнянь у частинних похідних. Аналіз наукових робіт показав, що існує три напрямки сучасних досліджень аналітичного опису мінімальних поверхонь: створення нових потужних методів у варіаційному численні, які дозволяють довести регулярність мінімальних поверхонь у багатовимірних випадках [2, 3]; вирішення практичних задач конструювання поверхонь архітектурних оболонок [4, 5] та розробка ефективних чисельних методів розв'язування диференціальних рівнянь, які є наслідками рівняння (1) [5, 6]; розробка методів конструювання неперервного каркасу мінімальних поверхонь за допомогою функцій комплексної змінної [7, 8]. Дана робота відноситься до останнього із зазначених напрямів і є розробкою метода аналітичного опису мінімальних поверхонь за допомогою ізотропних кривих, які лежать на поверхнях обертання, віднесених до ізометричної сітки координатних ліній.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Аналітичний опис неперервного каркасу мінімальних поверхонь пов'язаний із знаходженням параметричних рівнянь ізотропних кривих нульової довжини [1]. Побудову мінімальних поверхонь за допомогою ізотропних кривих Без'є реалізовано у дисертаційному дослідженні [7]. У дисертаційному дослідженні [8] знайдено в окремих випадках способи конструювання просторових ізотропних кривих за формулами Шварца та Вейерштрасса [1]. Слід зазначити, що аналітичний опис ізотропної кривої тільки в окремих випадках дозволяє виконати необхідні перетворення для знаходження рівнянь мінімальних поверхонь у явному вигляді, тому розширення способів утворення ізотропних кривих за допомогою функцій комплексної змінної є важливою умовою для розв'язання проблеми конструювання неперервного каркасу мінімальних поверхонь.

Формулювання цілей статті. Дослідити особливості аналітичного опису мінімальних поверхонь за допомогою ізотропних кривих, які лежать на поверхні конуса, віднесеного до ізометричної сітки координатних ліній, використовуючи запропонований метод.

Основна частина. Розглянемо поверхню обертання, параметричні рівняння якої мають вигляд:

$$\begin{aligned} X(\tau; \nu) &= \varphi(\tau) \cdot \cos \nu; \\ Y(\tau; \nu) &= \varphi(\tau) \cdot \sin \nu; \\ Z(\tau; \nu) &= \psi(\tau), \end{aligned} \quad (2)$$

де $\varphi = \varphi(\tau)$; $\psi = \psi(\tau)$ – параметричні рівняння меридіана поверхні обертання.

Метод аналітичного опису мінімальних поверхонь за допомогою ізотропних кривих, які лежать на поверхнях обертання, віднесених до ізометричної сітки координатних ліній, вимагає виконання основних етапів:

1. Перехід від ортогональної до ізометричної сітки координат, який здійснюється за допомогою введення нової змінної t , що пов'язана із змінною τ наступним чином [9]:

$$t = \int \frac{\sqrt{(\varphi'_{\tau})^2 + (\psi'_{\tau})^2}}{\varphi} d\tau. \quad (3)$$

2. Утворення виразу $\tau = \tau(t)$, що є можливим тільки в окремих випадках, та його підстановка у рівняння (2) з метою отримання параметричних рівнянь поверхні обертання, віднесеної до ізометричної сітки координатних ліній:

$$\begin{aligned} X(t; v) &= \varphi(\tau(t)) \cdot \cos v; \\ Y(t; v) &= \varphi(\tau(t)) \cdot \sin v; \\ Z(t; v) &= \psi(\tau(t)), \end{aligned} \quad (4)$$

де $t \in R; v \in [0; 2\pi)$.

3. Утворення лінійного елемента поверхні обертання (4), віднесеної до ізометричних координат, у вигляді $ds^2 = \alpha(t) \cdot (dv^2 + dt^2)$, де $E = G = \alpha(t)$ – вирази крайніх коефіцієнтів першої квадратичної форми поверхні (4). Знаходження умов рівності нулю виразу лінійного елемента поверхні, за допомогою його розкладу на множники у вигляді:

$$ds^2 = \alpha(t) \cdot (dv - i \cdot dt)(dv + i \cdot dt) \text{ або } ds^2 = \alpha(t) \cdot (dt - i \cdot dv)(dt + i \cdot dv). \quad (5)$$

4. Утворення параметричних рівнянь ізотропної кривої за допомогою підстановки в (4) однієї із умов, наприклад $v = i \cdot t + C$, отриманих із рівності $ds^2 = 0$:

$$x(t) = \varphi(\tau(t)) \cdot \cos(i \cdot t + C); y(t) = \varphi(\tau(t)) \cdot \sin(i \cdot t + C); z(t) = \psi(\tau(t)). \quad (6)$$

5. Знаходження параметричних рівнянь мінімальної поверхні за формулами:

$$X(u, v) = \operatorname{Re}\{x(u + i \cdot v)\}; Y(u, v) = \operatorname{Re}\{y(u + i \cdot v)\}; Z(u, v) = \operatorname{Re}\{z(u + i \cdot v)\}; \quad (7)$$

Знаходження параметричних рівнянь приєднаної мінімальної поверхні за формулами:

$$X^*(u, v) = \operatorname{Im}\{x(u + i \cdot v)\}; Y^*(u, v) = \operatorname{Im}\{y(u + i \cdot v)\}; Z^*(u, v) = \operatorname{Im}\{z(u + i \cdot v)\}. \quad (8)$$

6. Знаходження виразів коефіцієнтів першої та другої квадратичної форми утворених мінімальних поверхонь та перевірка рівності нулю виразу середньої кривини

$$H = \frac{E \cdot N - 2 \cdot F \cdot M + G \cdot L}{2(E \cdot G - F^2)}. \text{ Дослідження отриманих результатів.}$$

Наприклад, розглянемо бічну поверхню конуса, віднесену до ізометричних координат:

$$X(t; v) = e^{t \cos \beta} \cdot \cos v; Y(t; v) = e^{t \cos \beta} \cdot \sin v; Z(t; v) = e^{t \cos \beta} \cdot t g \beta, \quad (9)$$

де $t \in R, v \in [0; 2\pi), \beta \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Диференціюючи вирази (9), після перетворень, отримаємо вирази коефіцієнтів першої квадратичної форми поверхні (9): $E = G = e^{2t \cos \beta}; F = 0$. Тоді лінійний елемент конуса, віднесеного до ізометричної сітки координатних ліній, має вигляд:

$$ds^2 = e^{2t \cos \beta} \cdot (dv^2 + dt^2). \quad (10)$$

Розклавши на множники вираз (10) отримаємо:

$$ds^2 = e^{2t \cos \beta} \cdot (dv - i \cdot dt)(dv + i \cdot dt),$$

де i – уявна одиниця. Прирівнюючи до нуля праву частину останньої рівності, після інтегрування отримаємо:

$$v = i \cdot t + C \text{ або } v = -i \cdot t + C, \quad (11)$$

де C – довільна стала інтегрування. Вирази (11) називають координатами Дарбу (Darboux) [1].

Лінійний елемент (10) конуса визначає довжину будь-якої кривої, яка лежить на його поверхні. Тому при підстановці одного із виразів (11) у параметричні рівняння конуса (9) отримаємо параметричні рівняння двох сімей уявних ізотропних кривих нульової довжини. Зокрема, при підстановці виразу $v = i \cdot t + C$ у рівняння (9) для кожного значення

С отримаємо параметричні рівняння уявної ізотропної кривої, яка лежить на поверхні конуса (9):

$$x(t) = e^{t \cos \beta} \cdot \cos(i \cdot t + C); \quad y(t) = e^{t \cos \beta} \cdot \sin(i \cdot t + C); \quad z(t) = e^{t \cos \beta} \cdot \operatorname{tg} \beta. \quad (12)$$

Для знаходження рівнянь мінімальної та приєднаної до неї мінімальної поверхні у функціях комплексної змінної (12) введемо заміну: $t = u + i \cdot v$. Відокрепивши дійсну та уявну частину для кожної з функцій (12), маємо рівняння мінімальної поверхні (C – довільна стала):

$$\begin{aligned} X(u, v) &= e^{u \cos \beta} \cdot [\cos(C - v) \cdot \cos(v \cos \beta) \cdot \operatorname{ch}(u) + \sin(C - v) \cdot \sin(v \cos \beta) \cdot \operatorname{sh}(u)]; \\ Y(u, v) &= e^{u \cos \beta} \cdot [\sin(C - v) \cdot \cos(v \cos \beta) \cdot \operatorname{ch}(u) - \cos(C - v) \cdot \sin(v \cos \beta) \cdot \operatorname{sh}(u)]; \\ Z(u, v) &= e^{u \cos \beta} \cdot [\cos(v \cos \beta) \cdot \operatorname{tg} \beta]; \end{aligned} \quad (13)$$

та приєднаної мінімальної поверхні:

$$\begin{aligned} X^*(u, v) &= e^{u \cos \beta} \cdot [\cos(C - v) \cdot \sin(v \cos \beta) \cdot \operatorname{ch}(u) - \sin(C - v) \cdot \cos(v \cos \beta) \cdot \operatorname{sh}(u)]; \\ Y^*(u, v) &= e^{u \cos \beta} \cdot [\sin(C - v) \cdot \sin(v \cos \beta) \cdot \operatorname{ch}(u) + \cos(C - v) \cdot \cos(v \cos \beta) \cdot \operatorname{sh}(u)]; \\ Z^*(u, v) &= e^{u \cos \beta} \cdot [\sin(v \cos \beta) \cdot \operatorname{tg} \beta]. \end{aligned} \quad (14)$$

На рис.1 та рис.2 зображено мінімальну поверхню, побудовану за рівняннями (13) при $\beta = \frac{\pi}{4}$; $C = \frac{\pi}{2}$.

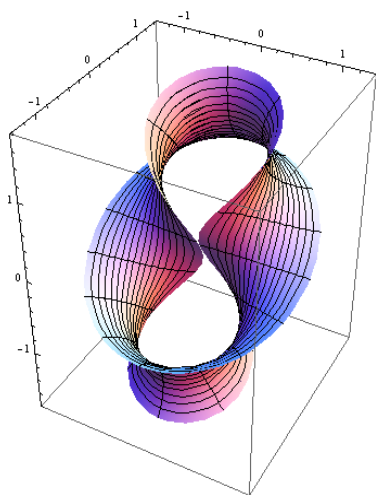


Рис. 1. Мінімальна поверхня, побудована за рівняннями (13)

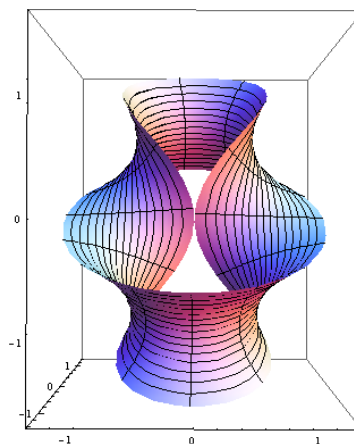


Рис.2. Фронтальна проекція мінімальної поверхні

Коефіцієнти першої квадратичної форми мінімальної поверхні (13) та приєднаної поверхні (14) дорівнюють:

$$E = G = e^{2u \cdot \cos \beta} \cdot (ch(u) + sh(u) \cdot \cos \beta)^2; \quad (15)$$

$$F = 0.$$

Коефіцієнти другої квадратичної форми мінімальної поверхні (13), знайдені за відомими формулами диференціальної геометрії [1], дорівнюють:

$$N = -L = e^{u \cdot \cos \beta} \cdot \cos(v \cdot \cos \beta) \cdot \sin \beta. \quad (16)$$

Коефіцієнти першої та другої квадратичних форм побудованих поверхонь (13) та (14), перетворюють вираз середньої кривини

$$H = \frac{E \cdot N - 2 \cdot F \cdot M + G \cdot L}{2(E \cdot G - F^2)},$$

для кожної із указаних поверхонь, до нуля.

При підстановці виразу $v = -i \cdot t + C$ у рівняння (9) для кожного значення C отримаємо параметричні рівняння іншої уявної ізотропної кривої, яка лежить на конусі:

$$x(t) = e^{t \cos \beta} \cdot \cos(-i \cdot t + C); \quad (17)$$

$$y(t) = e^{t \cos \beta} \cdot \sin(-i \cdot t + C); z(t) = e^{t \cos \beta} \cdot tg \beta.$$

Використовуючи для функцій комплексної змінної (17) заміну $t = u + i \cdot v$, можна знайти за формулами (7) і (8) параметричні рівняння мінімальної поверхні та приєднаної до неї. Параметричні рівняння вказаних мінімальних поверхонь відрізняються від рівнянь (13) і (14) відповідно, але мають рівні вирази коефіцієнтів першої та другої квадратичних форм.

Вираз (10) можна розкласти на множники у вигляді:

$$ds^2 = e^{2t \cos \beta} \cdot (dt - i \cdot dv)(dt + i \cdot dv) \quad (18)$$

Прирівнюючи до нуля праву частину рівності (18), після інтегрування отримаємо:

$$t = i \cdot v + C \text{ або } t = -i \cdot v + C, \quad (19)$$

Підставивши вирази (19) у параметричні рівняння конуса (9), отримаємо рівняння двох сімей уявних ізотропних кривих нульової довжини. Для кожного значення C за знайденими ізотропними кривими можна побудувати мінімальні поверхні та приєднані до них. Тоді, у параметричних рівняннях мінімальної та приєднаної поверхонь, у порівнянні з виразами (13) і (14) відповідно, змінні t і v "поміняються місцями", але вони мають рівні вирази відповідних коефіцієнтів першої та другої квадратичних форм..

Висновки. На поверхні конуса, віднесеної до ізометричної сітки координатних ліній, для кожного значення C можна побудувати чотири сім'ї ізотропних кривих, і кожній кривій поставити у відповідність мінімальну поверхню та приєднану до неї. Утворені мінімальні поверхні та приєднані мінімальні поверхні мають спільні метричні властивості та спільні властивості кривини поверхні.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Фиников С.П. Теория поверхностей / Фиников С.П. – М.–Л.:ГТТИ, 1934.–206 с.
2. Целочисленные потоки и минимальные поверхности. Сборник статей / (Феде-пер Г., Флеминг У.Х., Трискари Д., Де Джорджи Э., Альмгрен Ф. Дж., Саймонс Дж.); перевод с англ. Ю.С. Ильяшенко. – М.: Мир, 1973. – 204 с.
3. Минимальные поверхности / (Кархер Г., Саймон Л., Фудзимото Ф., Хильдебрандт С., Хоффман Д.); под ред. Р. Оссермана; перевод с англ. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. – 352 с.
4. Михайленко В.Е. Конструирование форм современных архитектурных конструкций / В.Е. Михайленко, С.Н. Ковалёв. – Киев: Будівельник, 1978. – 112 с.

5. Абдюшев А.А. Проектирование непологих оболочек минимальной поверхности / А.А. Абдюшев, И.Х. Мифтахутдинов, П.П. Осипов // Известия КазГАСУ. – 2009. – №2(12). – С. 86-92.
6. Гацунаев М.А. О равномерной сходимости кусочно-линейных решений уравнения минимальной поверхности / М.А. Гацунаев, А.А. Клячин // Уфимский мат. журнал. – 2014. – Т. 6, №3. – С. 3-16.
7. Аушева Н.М. Геометричне моделювання об'єктів дійсного простору на основі ізотропних характеристик : автореф. дис. на здобуття наук. ступеня д-ра техн. наук: 05.01.01 / Н. М. Аушева. – К.: КНУБА, 2014. – 38 с.
8. Коровіна І.О. Конструювання поверхонь сталої середньої кривини за заданими лініями інциденції: автореф. дис. на здобуття наук. ступеня канд. техн. наук: спец. 05.01.01. "Прикладна геометрія, інженерна графіка" / І.О. Коровіна. – К.: КНУБА, 2012. – 20 с.
9. Несвидомин В.Н. Способ аналитического отображения плоских изображений на криволинейные поверхности / В.Н. Несвидомин, Т.С. Пилипака, Т.С. Кремец // «MOTROL. Commission of Motorization and Energetics in Agriculture».– Vol. 16, No 3. – Lublin – Rzeszov, 2014. – С. 58 – 65.

УДК 004.9

РЕАЛІЗАЦІЯ ІДЕЇ ВІДКРИТИХ ІНФОРМАЦІЙНИХ СИСТЕМ В ТЕХНОЛОГІЯХ GOOGLE

Ратушняк Т.В.,(м. Київ, Україна)

Анотація. Розглянуто властивості та переваги відкритих інформаційних систем, наведено приклади успішного впровадження та розвитку відкритих інформаційних систем, запропоновано спосіб використання відкритості сервісу Google.

Ключові слова: інформаційна система, відкрита інформаційна система, відкрите програмне забезпечення, технології Google, сервіси Google

Аннотация. Рассмотрены свойства и преимущества открытых информационных систем, приведены примеры успешной реализации и развития открытых информационных систем, предложен способ использования открытости сервиса Google.

Ключевые слова: информационная система, открытая информационная система, открытое программное обеспечение, технологии Google, сервисы Google

Summary. The properties and advantages of open information systems are considered, the examples of successful implementation of open information systems are demonstrated, the way to use the openness of Google service is offered.

Key words: information system, information system open, open software technology Google, Google services.

Інформаційна система (ІС) — це сукупність організаційних і технічних засобів для збереження та обробки інформації з метою забезпечення інформаційних потреб користувачів.

Інформаційну або програмну систему можна віднести до відкритої системи, якщо вона володіє сукупністю наступних властивостей [10]: