

УДК. 519.21

**НЕКОТОРЫЕ МОДЕЛИ ОТКРЫТЫХ, МНОГОЭЛЕМЕНТНЫХ СИСТЕМ.**

Дубко В.А. (г.Нежин, Украина)

**Аннотация.** Выполнен обзор авторских работ, связанных с моделированием открытых, многоэлементных систем в 2012-2106 годах.

**Ключевые слова:** инварианты, стохастические первые интегралы, принцип согласованности, когерентные случайные поля, обобщенная формула Ито-Вентцеля.

**Abstract.** A review of the author's works associated with the modeling of open, multiple systems in the 2012-2106 years is made.

**Key words:** invariants, stochastic integrals of the first, the principle of consistency, coherence random field of generalized formula Ito-Wentzel.

Данная работа – это обзор некоторых математических моделей, связанных с моделированием открытых, многоэлементных систем, которые рассматривались и исследовались нами в 2012 – 2016 годах. Ссылки, на более ранние работы и работы других авторов, даются только при необходимости сделать изложение более строгим и не претендуют на полноту.

**1. Естественные инварианты стохастических динамических систем**

Пусть  $x(t) \in R^n$  - динамический процесс, являющийся решением системы стохастических дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} dx_i(t) &= a_i(t)dt + b_{i,k}(t)dw_k(t) + \int_{R(\gamma)} g_i(x(t);t;\gamma)v(dt;d\gamma), \\ x(t) &= x(t; x(0)) \Big|_{t=0} = x(0), \quad i = \overline{1, n}, \quad t \geq 0, \end{aligned} \quad (1.1)$$

где  $w(t) - m$  - мерный винеровский процесс,  $v(t; \Delta\gamma)$  – однородная по  $t$ , мера Пуассона [1, с.247,255].

Относительно коэффициентов  $a(x;t)$ ,  $b(x;t)$  и  $g(x(t);t;\gamma)$  уравнения (2.1) будем предполагать, они обладают достаточной степенью гладкости по совокупности переменных  $(x, t, \gamma)$ , и ограничениям, обеспечивающих справедливость дальнейших рассуждений.

**Определение.** Случайная функция  $\rho(t, x)$  называется ядром интегрального инварианта системы (1.1), если  $\forall t \in [0, T)$  реализуется равенство:

$$\int_{R^n} f(t; x) \rho(t, x) d\Gamma(x) = \int_{R^n} f(t; x(y; t)) \rho(0, y) d\Gamma(y), \quad (1.2)$$

( $\rho(0; x) \geq 0$ ,  $\int_{R^n} \rho(0; x) d\Gamma(x) = 1$ ), где интегрирование выполняется на основе интегральных сумм Римана, ( $\max_{x(0)} \Delta\Gamma(x(0)) \rightarrow 0$ ), в смысле среднеквадратического предела,  $\forall f(t; x) \in C^2(x)$  (в общем, случайных функций) [4], [6], [7].

Воспользовавшись (1.2), можно построить уравнение для ядер  $\rho(x; t)$  системы уравнений (1.1).

**Элементом стохастического объема**, порожденного случайным процессом  $x(t, x(0))$ , назовем следующую структуру:

$$\Delta\Gamma(t) = J(t)\Delta\Gamma(x(0)); \quad \Delta\Gamma(x(0)) = \prod_{i=0}^n \Delta x_i(x(0)) \quad (A)$$

где  $J(t)$  якобиан, построенный из элементов  $J_{i,j}(t; x(0))$  - которые могут быть найдены как решения системы (1.1), после дифференцирования  $x(t; x(0))$  по компонентам  $x(0)$  [1, с.287]

Под отображением  $\tilde{\Gamma}(0) \rightarrow \tilde{\Gamma}(t)$ , понимаем объединение отображений (A) не пересекающихся окрестностей  $\Delta\Gamma(x(0))$ , относящихся к разным точкам  $x(0) \in \Gamma(0)$ , и покрывающих  $\tilde{\Gamma}(0)$ .

Условия существования и единственности решений связано с непересекаемостью траекторий для разных начальных значений. Условие является естественным аналогом «закона сохранения» «числа не взаимодействующих, тождественных частиц». Именно поэтому

$$I_{\Gamma(0)}(t) = \int_{\Gamma(t)} \rho(t, x) d\Gamma(x) = \int_{\Gamma(0)} \rho(t, x(y; t)) J(t; y) d\Gamma(y) = \int_{\Gamma(0)} \rho(0, y) d\Gamma(y) = \text{const}.$$

$$\text{Следовательно, } \partial_t I_{\Gamma(0)}(t) \equiv 0.$$

Объединение интегралов такого вида по окрестности любого многообразия  $S(0)$  в  $R^n$ , можно назвать *естественными локальными динамическими инвариантами, а по всему пространству – глобальными*.

Общее число независимых  $\rho_i(t, x)$  не превышает  $n+1$ . Доказательство этого факта для стохастических динамических систем ([4], §5.2, с.119-120) подобно доказательству для детерминированных систем.

## 2. Обобщенная формула Ито-Вентцеля.

Далее нам понадобится уравнение для стохастического дифференциала от случайной, скалярной функции  $F(t, x(t))$  при условии, что  $F(x; t)$  - подчинена уравнению:

$$dF(x; t) = Q(t; x)dt + D_k(t; x)dw_k(t) + \int_{R(\gamma)} G(x; t; \gamma)v(dt; d\gamma), \quad F(x; 0) = F_0(x), \quad (2.1)$$

где  $w(t) - m$  - мерный винеровский процесс,  $v(t; d\gamma)$  – однородная по  $t$ , мера Пуассона [1, с.247,255].

Если  $x(t) \in R^n$  - динамический процесс, являющийся решением системы (1.1) то, выражение для стохастического дифференциала  $F(t; x(t))$  имеет вид [6]:

$$\begin{aligned} dF(t; x(t)) = & Q(t; x(t))dt + D_k(t; x(t))dw_k + b_{i,k}(t) \frac{\partial}{\partial x_i} F(t; x(t))dw_k + \\ & + [a_i(t) \frac{\partial}{\partial x_i} F(t; x(t)) + \frac{1}{2} b_{i,k}(t) b_{j,k}(t) \frac{\partial^2 F(t; x(t))}{\partial x_i \partial x_j} + b_{i,k}(t) \frac{\partial}{\partial x_i} D_k(t; x(t))]dt + \\ & + \int [(F(t; x(t) + g(t; \gamma)) - F(t; x(t)))]v(dt; d\gamma) + \int G(t; x(t) + g(t; \gamma); \gamma)v(dt; d\gamma). \end{aligned} \quad (2.2)$$

(Полагаем, что требования к коэффициентам уравнений гарантирующих для (1.1), (2.1) существования и единственность их решений, существования соответствующих частных производных в (2.2) – выполненными.)

Формулу (2.2), а также к которым приходят при различных комбинациях перехода к централизованной мере [6],[18]: в (1.1) или (2.1), или одновременно в (1.1) и (2.1) - было предложено называть обобщенной формулой Ито-Вентцеля (ОФИ-В) [6],[18]. Это связано с тем, что формула, которой дали название Ито-Вентцеля, была получена при отсутствии пуассоновских возмущений.

### 3. Стохастические первые интегралы.

На основе  $\rho_l(t, z)$ , можно построить случайные функции,

$$\rho_l(t, x) / \rho_{n+1}(t, x) = u_l(t, x) \quad (3.1)$$

Эти функции, в силу свойств  $\rho_l(t, z)$ , приводят к равенствам:

$$u_l(t, x(x_0; t)) = u_l(0, x_0) \quad (3.2)$$

Следовательно,  $u_l(t, x)$  являются стохастическими первыми интегралами (1.1). Равенство (3.1) показывает, что число независимых  $u_l(t, x)$  не превышает  $n$ .

Уравнения для  $u_l(t, x)$  можно построить используя уравнение для  $\rho_l(x; t)$ , [6]. В то же время, уравнение для  $u_l(t, x)$  можно получить опираясь на ОФИ-В (2.2), в предположении, что  $u_l(t, x)$  - решение уравнения (2.1), и выполнено требование (3.2) на решениях (2.2) [6].

В свою очередь, уравнение для  $\rho(x; t)$  можно получить, трактуя  $\rho(x; t)J$ , как совместный стохастический первый интеграл системы уравнений (2.2) и уравнения для якобиана перехода  $J(t)$ , построенного на основе системы (2.2) [6].

В работах [6], [7] была продемонстрирована схема получения уравнений Колмогорова: прямых и обратных - на основе уравнений для стохастической плотности.  $\rho(x; t)$ , отличающаяся, например, от приведенной в [1].

### 3. Стохастические уравнения Гамильтона.

Пусть  $x_i(t), x_{i+1}(t)$  - решения системы стохастических дифференциальных уравнений Ито с винеровскими и пуассоновскими возмущениями:

$$\begin{aligned} dx_i(t) &= a_i(t; x(t))dt + b_{i,k}(t; x(t))dw_k(t) + \int_{\mathbb{R}(\lambda)} g_i(t; x(t); \lambda)\nu(dt; d\lambda), \\ dx_{i+n}(t) &= a_{i+n}(t; x(t))dt + b_{i+n,k}(t; x(t))dw_k(t) + \int_{\mathbb{R}(\lambda)} g_{i+n}(t; x(t); \lambda)\nu(dt; d\lambda), \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$x_i(t) = x_i(t; x(0))|_{t=0} = x_i(0), \quad x_{i+n}(t) = x_{i+n}(t; x(0))|_{t=0} = x_{i+n}(0), \quad i = \overline{1, n}, k = \overline{1, m}.$$

В работе [8] было установлена теорема, которую мы подадим в удобной для целей работы формулировке, близкой к приведенной в [9]:

**Теорема.** Стохастические обобщенные уравнения Ито (3.1), с коэффициентами:

$$\begin{aligned} \text{A)} \quad & \begin{cases} a_i(t; x) = \frac{\partial H(t; x)}{\partial x_{i+n}} - [(1-\beta) \frac{\partial H_k(t; x)}{\partial x_j} \frac{\partial^2 H_k(t; x)}{\partial x_{i+n} x_{j+n}} - \beta \frac{\partial H_k(t; x)}{\partial x_{j+n}} \frac{\partial^2 H_k(t; x)}{\partial x_{i+n} \partial x_j}], \\ a_{i+n}(t; x) = -\frac{\partial H(t; x)}{\partial x_i} + [(1-\beta) \frac{\partial H_k(t; x)}{\partial x_j} \frac{\partial^2 H_k(t; x)}{\partial x_i \partial x_{j+n}} - \beta \frac{\partial H_k(t; x)}{\partial x_{j+n}} \frac{\partial^2 H_k(t; x)}{\partial x_i \partial x_j}] \end{cases} \\ \text{B)} \quad & b_{i,k}(t; x) = \frac{\partial H_k(t; x)}{\partial x_{i+n}}, \quad b_{i+n,k}(t; x) = -\frac{\partial H_k(t; x)}{\partial x_i}; \quad \forall k = \overline{1, m}, \quad i, j = \overline{1, n}. \\ \text{C)} \quad & g_i(t; x; \lambda) = \frac{\partial}{\partial x_{i+n}} H_0(t; x; \lambda), \quad g_{i+n}(t; x; \lambda) = -\frac{\partial}{\partial x_i} H_0(t; x; \lambda), \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}(\lambda), \end{aligned}$$

при условии, что

$$H_0(t; x; \lambda) = H_0(t; \vartheta_1 x_1 + \vartheta_{1+n} x_{1+n}; \vartheta_2 x_2 + \vartheta_{2+n} x_{2+n}; \dots; \vartheta_n x_n + \vartheta_{2n} x_{2n}; \lambda),$$

где  $\beta$  и  $\vartheta_j$  – произвольные функции, не зависящие от  $x$ , требования к которым, как и к

$H(t; x), H_k(t; x)$ ,  $k = \overline{1, m}$ , в общем, случайным функциям, связываем только с не нарушением условий существования и единственности решения (3.1), образуют класс стохастических уравнений (Ито-Гамильтона) с винеровскими и пуассоновскими возмущениями, для которых интеграл Пуанкаре:

$$I(Z(0, \gamma)) = \int_0^1 x_{i+n}(t; x_l(\gamma)) J_{i,l}(t; x_l(\gamma)) \delta x_l(\gamma), \quad l = \overline{1, 2n}, \quad i = \overline{1, n},$$

где  $\delta x_l(\gamma)$  –  $l$ -ая проекция элемента дуги произвольного замкнутого контура начальных значений  $Z(0, \gamma)$  – инвариант (полагаем, что функции  $x_l(\gamma)$  – дифференцируемы).

Отметим, что примененный в подход, опирающийся на интегрирования по начальным значениям, позволяет с самого начала работать в рамках теории уравнений Ито и предположений относительно гладкости  $H_0(t; x; \lambda)$   $H(x; t), H_k(x; t)$ , – обычных для классической механики. Отметим так же, что использование требование инвариантности интеграла Пуанкаре – Картана и стохастических уравнений Ито при переходе к представлению Стратоновича полученных [17], приводит к совпадению с установленным выше классом уравнений, только при  $\beta = 0.5$ . Т.е., определяемый класс стохастических уравнений Гамильтона, обеспечивающих инвариантность интегралов Пуанкаре, даже только для винеровских возмущений, шире установленных в [4] и [17].

#### 4. Подход Ланжевена. Уравнения диффузии.

**Подход Ланжевена**, прежде всего, трактуется как *принцип согласованности: требование совпадения осредненных значений микрохарактеристик с соответствующими аналогами на макроуровне.*

Во-вторых, включение случайности рассматриваем как метод, позволяющий заменить множество взаимодействий с окружающими системами такими эффективными случайными процессами, которые обеспечат выполнение принципа согласованности.

Использование уравнений Ланжевена связано с переходом к более полному моделированию динамики выделенных подсистем.

Эффективности принципа Ланжевена продемонстрирована на примерах установлении соответствие между определенными моделями диффузии и стохастическими уравнениями [11].

То, что уравнения Ланжевена для неоднородной среды в форме Ито приводит к второму закону Фика, по-видимому, решает спор об описании динамики броуновских частиц в пользу уравнений Ито, а не Стратоновича [4].

В работах [4], [11] рассмотрены различные варианты уравнения Ланжевена, приводящие к классическим распределениям Максвелла, Максвелла – Больцмана, самодиффузии. Были исследованы и неклассические модели: диффузия с ограниченной по величине скоростью (отличную от моделей Каца и подобных, рассмотренных многими другими авторами), модель динамики электрона с учетом радиационного трения.

Приведенные в [5], [11] рассуждения, мотивируют выбор такого уравнения динамики, взаимодействующего с собственным полем, электрона:

$$-\varepsilon d\left(\frac{d}{dt}v(t)\right) = (1-|v|^2(t)c_0^{-2})^{-0.5} \frac{dv(t)}{dt} dt - (1-|v|^2(t)c_0^{-2})^{-0.5} \frac{1}{m} F(t)dt + \sigma(t)dw(t), \quad (4.1)$$

где  $v(t)$  скорость.

Это уравнение отличается от построенного Лоренцом [15]. Решение (4.1) не приводит к парадоксу самоускорения электрона [14], и  $v(t)$ , при  $\varepsilon \downarrow 0$ , может быть аппроксимировано [11] (в смысле слабой или среднеквадратической сходимости) решением  $\bar{v}(t)$  уравнения:

$$d\bar{v}(t) = -\bar{v}(t)\sigma^2 c_0^{-2} dt + m^{-1}F(t)dt + \sigma(t)(1-|v|^2(t)c_0^{-2})^{0.5} dw(t). \quad (4.2)$$

Как утверждается в работе [13], уравнение динамики электрона вида:

$$dv(t) = -\beta v(t) + m^{-1}F(t)dt + f(t)dt, \quad (4.3)$$

где  $f(t)$  хаотические колебания электромагнитных полей, при соответствующем выборе  $\beta > 0$ , приводит к правильному выражению для эффективного сечения рассеяния с учетом радиационного трения. Но, в то же время, не происходит нарушение второго закона термодинамики. Как видим, вид (4.3), совпадает с полученным нами, на основе уравнения (4.1), уравнением (4.2).

## 5. Диффузия в когерентных случайных полях.

### Алгоритм асимптотической аппроксимации.

Далее, нашей задачей будет установление вида уравнения для предельного процесса аппроксимирующего процесс  $x_\varepsilon(t)$ , являющегося решением системы уравнений с винеровскими и пуассоновскими возмущениями:

$$\begin{aligned} \varepsilon du_\varepsilon(t) = & -\mu(t; x_\varepsilon(t); y(t; x_\varepsilon(t)))u_\varepsilon(t)dt + F(t; x_\varepsilon(t); y(t; x_\varepsilon(t)))dt + \\ & + \sigma(t; x_\varepsilon(t); y(t; x_\varepsilon(t)))dw_1(t) + \int_{\mathbb{R}(\gamma)} g_1(t; x_\varepsilon(t); y(t; x_\varepsilon(t)); \gamma)v_1(dt; d\gamma), \end{aligned} \quad (5.1)$$

$$dx_\varepsilon(t) = u_\varepsilon(t)dt, \quad x_\varepsilon(t)|_{t=0} = x(0); \quad u_\varepsilon(t)|_{t=0} = u(0),$$

где  $y(t; x)$  является решением стохастического уравнения:

$$dy(t; x) = Q(t; x)dt + D(t; x)dw_2(t; x) + \int_{\mathbb{R}(\gamma)} g_2((t; x; \gamma)v_2(dt; d\gamma) \quad (5.2)$$

$$y(t; x)|_{t=0} = f(x),$$

и случайные возмущения  $w_1(t)$ ,  $w_2(t)$ ,  $v_1(\Delta t; \delta\gamma)$ ,  $v_2(\Delta t; \delta\gamma)$  - независимые.

Уравнение (5.1) соответствует броуновской диффузии в среде случайными коэффициентами. Решение  $y(t; x)$  уравнения (5.2) можно отождествить со случайным по  $t$ , но мгновенно коррелируемым по  $x$ , полем - «когерентным случайным полем».

При построении уравнения для аппроксимирующего  $x_\varepsilon(t)$  процесса, воспользуемся алгоритмом, предложенным в [2], [3], и эффективно примененный, например, в [4], [16].

Остановимся на этапах его реализации:

1. В основу положена, прежде всего, возможность перехода от уравнения (3) к интегральному равенству:

$$x_\varepsilon(t) - x(0) = -\varepsilon \int_0^t \mu^{-1}(\tau; x_\varepsilon(\tau); y(\tau; x_\varepsilon(\tau))) du_\varepsilon(\tau) + \int_0^t \frac{\sigma(\tau; x_\varepsilon(\tau); y(\tau; x_\varepsilon(\tau)))}{\mu(\tau; x_\varepsilon(\tau); y(\tau; x_\varepsilon(\tau)))} dw_1(\tau) + \\ + \int_0^t \frac{F(\tau; x_\varepsilon(\tau); y(\tau; x_\varepsilon(\tau)))}{\mu(\tau; x_\varepsilon(\tau); y(\tau; x_\varepsilon(\tau)))} d\tau + \int_{\mathbb{R}(\gamma)} \frac{g_1(\tau; x_\varepsilon(\tau); y(\tau; x_\varepsilon(\tau)); \gamma)}{\mu(\tau; x_\varepsilon(\tau); y(\tau; x_\varepsilon(\tau)))} \nu_1(dt; d\gamma). \quad (5.3)$$

2. Затем, после выполнения последовательно несколько раз операции интегрирования по частям, связанных с первым интегральным выражением в (5.3), опираясь на формулу Ито для процессов с пуассоновскими и винеровскими возмущениями, производится оценка модуля математического ожидания выражений содержащих  $\varepsilon u_\varepsilon(\tau)$ ,  $\varepsilon u_\varepsilon^2(t)$  и  $\varepsilon^2 u_\varepsilon^3(t)$ .

3. В появившихся, после преобразований, интегралах, не имеющих множителями параметр  $\varepsilon$ , в подынтегральных функциях снимается индексация по  $\varepsilon$ . Это соответствует формальной замене  $x_\varepsilon(\tau)$  на  $x(\tau)$ . Одновременно убираются слагаемых порядка  $O(\varepsilon^\beta)$ ,  $1 > \beta > 0$ . Полученное интегральное уравнение рассматривается как уравнение для аппроксимирующей переменной  $x(\tau)$ .

4. На последнем этапе, доказывається, что  $\lim_{\varepsilon \downarrow 0} M[(x(t) - x_\varepsilon(t))^2] = 0$ , или в рамках принятых в теории случайных процессов обозначений:  $\lim_{\varepsilon \downarrow 0} x_\varepsilon(t) = x(t)$ .

На основе этого алгоритма, найдено уравнение для предельного процесса [12]:

$$x(t) - x(0) = \\ = \int_0^t \frac{F(\tau; x(\tau); y(\tau; x(\tau)))}{\mu(\tau; x(\tau); y(\tau; x(\tau)))} d\tau + \int_0^t \frac{\sigma(\tau; x(\tau); y(\tau; x(\tau)))}{\mu(\tau; x(\tau); y(\tau; x(\tau)))} dw_1(\tau) + \int_0^t \int_{\mathbb{R}(\gamma)} \frac{g_1(\tau; x(\tau); y(\tau; x(\tau)); \gamma)}{\mu(\tau; x_\varepsilon(\tau); y(\tau; x_\varepsilon(\tau)))} \nu_1(d\tau; d\gamma) + \\ + \int_0^t d\tau \left[ \frac{\partial}{\partial z} \mu^{-1}(\tau; z; y(\tau; x(\tau))) \Big|_{z=x(\tau)} + \frac{\partial}{\partial y} \mu^{-1}(\tau; x(\tau); y(\tau; x(\tau))) \frac{\partial}{\partial x} y(\tau; x(\tau)) \right] \frac{\sigma^2(\tau; x(\tau); y(\tau; x(\tau)))}{2\mu(\tau; x(\tau); y(\tau; x(\tau)))},$$

не забывая при этом, что  $y(t; x)$  - решение уравнения (5.2).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гихман И.И., Скороход А.В. Стохастические дифференциальные уравнения. Киев: Наук. думка, 1968. 354 с.
2. Дубко В.А. Стохастические дифференциальные уравнения в некоторых задачах математической физики. Канд дис. Киев 1979. 75 с.
3. Дубко В.А. Понижение порядка стохастических дифференциальных уравнений с малым параметром при старшей производной // Теор. случ. процессов, - 1980.- №8 С. 35-41.

4. Дубко В.А. Вопросы теории и применения стохастических дифференциальных уравнений - Владивосток: ДВО АН СССР, 1989. 185 с.
5. Дубко В.А. Применение метода "физического смысла" на примере проблемы построения динамики электрона // Педагогический процесс в условиях перехода к новому состоянию общества. Тезисы и докл. науч.-практ. межвуз. конфер. Биробиджан, - 1995 - Ч.1. С.70-72.
6. Дубко В.А. Стохастические дифференциальные уравнения. Избранные разделы.: Уч.-метод. пособ. К.: Логос, 2012. 68 с.
7. Дубко В.А. Теорема об уравнениях для ядер обобщенного уравнения Ито и ее применение при построении уравнений Колмогорова. // Вестник Приамурского государственного университета им. Шолом-Алейхема. №3 (13), 2013. С.43-53.
8. Дубко В.А. Элементы стохастической аналитической механики. Стохастические уравнения Гамильтона //К.: Науковий вісник академії муніципального управління серія «Техніка», Вип.1 (7). 2014. С. 58-57.
9. Дубко В.А. Элементы стохастической аналитической механики. Аналог теоремы Лиувилля. //К.: Науковий вісник академії муніципального управління серія «Техніка», Вип.2 (8). 2014. С. 58-57.
10. Дубко В.А., Дубко А.В. Обобщенная формула Ито-Вентцеля и примеры ее применения // К.: Науковий вісник академії муніципального управління серія «Техніка», Вип.1 (9). 2015. С. 55-64.
11. Дубко В.А., Дубко А.В. Уравнения Ланжевена согласованные с классическими и неклассическими моделями диффузии// К.: Науковий вісник академії муніципального управління серія «Техніка», Вип.2 (10). 2015. С. 172-182.
12. Дубко В.А. Диффузия в когерентных случайных полях // Культура, наука, образование: проблемы и перспективы: Материалы V Международной научно-практической конференции (г. Нижневартовск, 09—10 февраля 2016 года) / Отв. ред. А.В. Коричко. — Нижневартовск: Изд-во Нижневарт. гос. ун-та, 2016. -Ч. II. — 390 с. С.160-164.
13. Климонтович Ю.Л. К статистическому обоснованию уравнения Шредингера // ТМФ. - 1993 - Т.97- №1. С.3-26.
14. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория поля.— М.: Наука, 1973
15. Лоренц Г.А. Теория электронов и ее применение к явлениям светового и теплового излучения - М.: Главное издание технико-теоретической литературы, 1953 . 370 с.
16. Скороход А.В. Стохастические уравнения для сложных систем - М.: Наука, 1983—190 с.
17. Bismut J.-M. Mecanique aleatoire. Springer, 1981. 579 p.
18. Doobko V.A. The variant of construction and justification of the generalized Ito-Wentzell's formula. arXiv:1504.03118.