

УДК 631.3: 621.01

ДИНАМІЧНИЙ РОЗРАХУНОК КОМБІНОВАНИХ МАШИН

Литвинов О.І.¹

¹ доц., канд. техн. наук, Ніжинський агротехнічний інститут НУБіПУ

Аналізується математична модель механічної системи складних комбінованих машин з пружними ланками і дискретними масами.

Ключові слова: динаміка, модель, метод, машина, диференціальне рівняння, пружність, надійність.

Вступ. У галузі сільськогосподарського і лісогосподарського машинобудування недостатньо застосовуються методи динамічного розрахунку машин і машинних агрегатів. Розвиток сучасного машинобудування, пов'язаний з постійним зростанням робочих швидкостей і швидкодії функціональних систем машин, підвищенням потужностей енергетичних засобів і, як наслідок, збільшенням навантажень, що передаються в їхніх елементах, вимагає для забезпечення необхідного рівня надійності застосування при проектуванні машин динамічних методів дослідження й розрахунків.

Роками в галузі застосовуються передачі, які є активними збудниками динамічних процесів, що вносять значні інерційні добавки і збільшують небезпеку виникнення резонансних явищ. Підвищення зі зростанням швидкостей питомої ваги інерційних навантажень, пропорційних квадрату кутових швидкостей, а також рівня коливань сил зовнішніх опорів призводить до виникнення в пружних системах машин коливальних процесів, що вносять у навантаження досить значні динамічні доданки. У зв'язку із цим з'являється нагальна потреба в урахуванні реальних фізичних властивостей ланок, що утворюють механізми, а також таких факторів, як взаємовплив параметрів приводних двигунів і технологічного процесу в робочих машинах.

Аналіз літератури. Динамічним методам досліджень присвячена велика кількість робіт. Але у більшості із них підтверджується погляд на машину, як на систему твердих тіл, що утворюють кінематичні ланцюги, який, на нашу думку, слід розглядати, як далекий від реальності. У цьому разі динамічна модель, якою пропонується замінити реальну машину, передбачає, що конкретна маса позбавлена

пружності, а пружна в'язь не має маси. У дійсності механізми мають більш, ніж один ступінь вільності внаслідок наявності у них пружних ланок. Тому закон руху ланок і навантаження, що передаються ними, неможливо визначати без врахування відносних переміщень, що викликаються деформацією ланок. [1].

Розвиток промислового виробництва і транспорту викликало необхідність розглядати великі механічні системи більш детально, включаючи дискретні маси і пружні ланки, що сполучають між собою маси системи. При недостатньо напружених темпах роботи машин питання динаміки пружних систем не мали великого практичного значення ні при стаціонарних режимах роботи, ні при перехідних режимах під час розгону і гальмування. Мабуть, розвиток залізничного транспорту, в першу чергу, поставив перед наукою задачі про динамічне дослідження систем з пружними механічними в'язями, щоб отримати необхідні відомості для проектування раціональної системи зчіпки вагонів (крізна чи некрізна зчіпка). Цією проблемою опікувались відомі вчені механіки Резаль і Жуковський. Проте, дослідження останнього дозволило з'ясувати весь перебіг процесу зрушення потягу з місця і надати рекомендації для проектування некрізної зчіпки, яка застосовується і в наш час.

Динамічні дослідження систем з пружними в'язями у найбільш широкому плані проводились на транспорті і у гірничій справі. Класичним прикладом тому є фундаментальна праця М.М. Федорова «Теорія і розрахунок гармонічного рудникового підйому». Трудно переоцінити значення динамічних досліджень металургійних машин [1], виконаних С.Н. Кожевниковим, Ф.К. Іванченком, А.В. Праздниковим, з динаміки верстатів – В.А. Кудіновим та інш., по гірничим машинам – Д.П. Волковим, А.Н. Голубенцевим, А.В. Доукіним, Є.Є. Новіковим.

Зупинимось ще на деяких питаннях, що мають суттєве значення. Як показав аналіз ряду механізмів металургійних, гірничих і сільськогосподарських машин [3], під час проектування рухомих з'єднань або кінематичних пар вносяться зайві, надлишкові в'язі. В результаті цього на елементах цих пар у процесі роботи з'являються додаткові реакції, які не зв'язані з технологічними навантаженнями, з процесом роботи машини. Ці додаткові навантаження або сили не враховуються при розрахунках. Тому спочатку необхідно усунути структурні дефекти механізмів, зробивши їх по можливості статично визначеними, а потім проводити динамічні розрахунки.

Мета роботи. Авторами поставлена задача провести динамічне дослідження механічних систем механізмів приводу, силових ліній складних машин типу причіпних комбайнів, наприклад, кукурудзозбиральних, кормозбиральних, привід яких здійснюється від вала відбору потужності енергетичного засобу через кардан до центрального редуктора комбайна, а потім розгалужується до різних робочих органів. У роботі передбачається привести методи утворювання еквівалентної динамічної моделі складних матеріальних систем комбайнів, скласти й розв'язати диференціальні рівняння руху з урахуванням отриманих експериментально і апроксимованих рядами Фур'є моментів на робочих органах, надати аналіз характеристичного рівняння й висновки за результатами дослідження.

Обґрунтування динамічної моделі. Трансмсія комбінованих машинних агрегатів є складною розгалуженою згинально-крутильною динамічною системою з великою кількістю розподілених і зосереджених мас, з'єднаних елементами, що мають певні пружно-інерційні характеристики. Детальне дослідження таких систем пов'язане з немалими ускладненнями математичного характеру. Проте, практичні задачі динамічного дослідження надають можливості значного спрощення подібних моделей.

Не спотворюючи основних закономірностей дійсних динамічних процесів, можна замінити реальний механізм його еквівалентною моделлю, яка може бути складена з абсолютно твердих дискретних мас і безінерційних пружних сполучних елементів. При цьому отримаємо розрахункову схему з великою кількістю ступенів вільності, що досить складну для формалізації.

Порядок перетворення реальної матеріальної системи й одержання динамічних характеристик елементів моделі прийнятий наступний. Насамперед, визначаються моменти інерції мас і крутильні піддатливості всіх конструктивних елементів складних машин, використовуючи розрахунково-експериментальні методи. Піддатливості визначались, головним чином, розрахунковим шляхом. У необхідних випадках ураховувалась згинальна піддатливість валів і опор, що зводилася до крутильної.

У результаті проведених операцій була отримана складна розгалужена схема з великим числом мас різного порядку мализни. Нехтуючи масами на порядок меншими, поєднуючи ті маси, жорсткість в'язей між якими на порядок вище інших, і зводячи систему до головного вала, виходячи з умов рівності кінетичної й

потенціальної енергії, одержуємо систему з 8-10 ступенями вільності, яка є ще досить складною для розрахунків.

Подальше зменшення числа ступенів вільності проводилось з урахуванням збереження або несуттєвого відхилення частот низьких тонів коливань, що, як показують експериментальні дослідження, є домінуючими при формуванні динамічних навантажень.

При об'єднанні двох сусідніх мас і зменшенні числа ступенів вільності реальної машини маси або моменти інерції мас й піддатливості спрощеної системи визначалися з умови [4]:

$$I'_k = I_k + I_{k+1};$$

$$e'_{k-1} = \frac{I_{k+1}}{I_k + I_{k+1}} e_k; \quad e'_k = \frac{I_k}{I_k + I_{k+1}} e_k;$$

У підсумку проведення перерахованих операцій складна матеріальна система машини була зведена до більш простої тримасової розгалуженої крутильно-коливальної системи зі збереженням двох перших форм коливань.

Еквівалентна розрахунково-силова схема представлена на рис. 1.

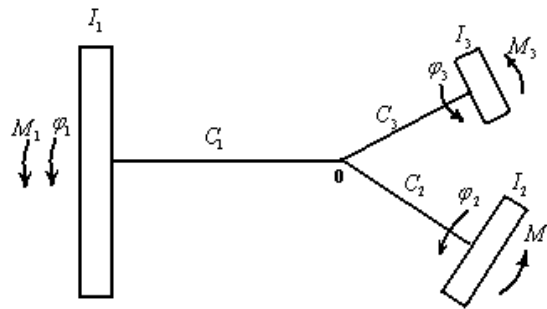


Рис. 1

Еквівалентна схема механічної системи комбайнового агрегату де: I_1, I_2, I_3 – зведені до приводного вала моменти інерції двигуна й двох основних мас агрегату;

C_1, C_2, C_3 – зведені коефіцієнти жорсткості еквівалентних валів;

$\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_0$ – кути закручення мас і центра розгалуження;

M_1, M_2, M_3 – зведені до приводного вала моменти зовнішніх сил двигуна і сил опору ведених мас агрегату.

Прийнято, що момент дизельного двигуна змінюється лінійно у функції кутової швидкості на робочій ділянці характеристики (підтверджено експериментально).

$$M_1 = M_n \frac{\omega_0 - \omega_1}{\omega_0 - \omega_n} = \Gamma(\omega_0 - \omega_1) \quad (1)$$

де M_n – зведений номінальний момент двигуна,
 ω_0, ω_n – кутові швидкості двигуна на холостому ході й номінальна.

Формалізація моделі. Загальний розв’язок диференціальних рівнянь руху

Вихідна система диференціальних рівнянь, яка складена методом Лагранжа в другій формі, має вигляд:

$$\begin{aligned} I_1 \ddot{\phi}_1 + C_1(\phi_1 - \phi_0) &= M_1, \\ I_2 \ddot{\phi}_2 + C_2(\phi_2 - \phi_0) &= M_2, \\ I_3 \ddot{\phi}_3 + C_3(\phi_3 - \phi_0) &= M_3. \end{aligned} \quad (2)$$

З огляду на те, що відносні кутові переміщення мас $\phi_1 - \phi_0$, або деформації в'язей пропорційні відповідним силам пружності M_{10}, M_{20}, M_{30}

$$(\phi_1 - \phi_0)C_1 = M_{10}, \quad (\phi_2 - \phi_0)C_2 = M_{20}, \quad (\phi_3 - \phi_0)C_3 = M_{30},$$

і виражаючи кутові переміщення ϕ_2 й ϕ_3 і їхні другі похідні через $\ddot{\phi}_1$, а також беручи до уваги умови зчленування моментів сил пружності в центрі розгалуження, отримаємо систему диференціальних рівнянь у нових узагальнених координатах: силах пружності і їхніх похідних, доцільність застосування яких переконливо обґрунтована в роботах проф. С.М. Кожевнікова [1].

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_1 + \frac{\Gamma}{I_1} \omega_1 + \frac{M_{10}}{I_1} &= \frac{\Gamma}{I_1} \omega_0, \\ \dot{\omega}_1 - \frac{\ddot{M}_{10}}{C_1} + \frac{\ddot{M}_{20}}{C_2} + \frac{M_{20}}{I_2} &= \frac{M_2}{I_2}, \\ \dot{\omega}_1 - \frac{\ddot{M}_{10}}{C_1} + \frac{\ddot{M}_{30}}{C_3} + \frac{M_{30}}{I_3} &= \frac{M_3}{I_3}, \\ M_{10} + M_{20} + M_{30} &= 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Отримана система диференціальних рівнянь (3), що встановлює функціональну залежність між моментами сил пружності на окремих ділянках і параметрами зведеної системи, описує поведінку машинного агрегату при дослідженні динамічних процесів. Загальний розв’язок однорідних диференціальних рівнянь без правої частини

будемо шукати у вигляді $A_j e^{\lambda t}$, де λ – ряд характеристичних чисел, при яких рівняння перетворюються в тотожність, A_j – сталі інтегрування, обумовлені початковим станом системи [2].

Підставляючи прийнятий розв'язок і його похідні в систему рівнянь (3), у якій праві частини покладені рівними нулю, та покладаючи нулю й розкриваючи детермінант, складений з коефіцієнтів при шуканих сталих A_j , отримаємо характеристичне рівняння п'ятого порядку, корені якого визначають власні частоти системи (колові частоти вільних коливань).

$$\left[\frac{\lambda}{I_1} + \frac{\lambda^2}{C_1} \left(\lambda + \frac{\Gamma}{I_1} \right) \right] \left[\left(\frac{\lambda^2}{C_2} + \frac{1}{I_2} \right) + \left(\frac{\lambda}{C_3} + \frac{1}{I_3} \right) \right] + \left(\frac{\lambda^2}{C_2} + \frac{1}{I_2} \right) \left(\frac{\lambda^2}{C_3} + \frac{1}{I_3} \right) \left(\lambda + \frac{\Gamma}{I_1} \right) = 0. \quad (4)$$

Наведений нижче аналіз характеристичного рівняння для більш простих, у тому числі і для граничних випадків, дозволив установити границі стійкості руху системи, а також чисельно розв'язати його з подальшим уточненням коренів по методу ітерацій І. Ньютона, оцінити вплив дисипації на величину останніх.

З п'яти отриманих коренів характеристичного рівняння перший корінь, що визначає розгін системи, є дійсним, а інші чотири – комплексні, взаємоспряжені, які визначають форми коливання системи.

Прийнявши одну з амплітуд, наприклад, (A_1) сталою й виразивши інші амплітуди через цю сталу, отримаємо коефіцієнти передачі $K_j^{(n)}(\lambda_n)$. Загальний розв'язок системи однорідних диференціальних рівнянь представимо у вигляді вектора

$$\vec{Y}_0(t) = \{ \omega_1(t); M_{10}(t); M_{20}(t); M_{30}(t) \} \quad (5)$$

Частинні розв'язки диференціальних рівнянь отримані з урахуванням правої частини, що уявляє функції зовнішніх моментів. Беручи до уваги експериментальні діаграми сил, що формують зовнішні моменти в системі, урахувавши їхню реальну періодичність, уявляли зовнішнє навантаження у вигляді гармонічного ряду Фур'є. Використовуючи принцип суперпозиції для лінійних систем, знаходимо реакцію системи на кожен гармонічну складову, підсумовуючи потім отримані результати.

Частинні розв'язки можуть бути представлені у вигляді

$$\vec{Y}_0(t) = \begin{bmatrix} M_{10}(t) \\ M_{20}(t) \\ M_{30}(t) \\ \omega(t) \end{bmatrix} = M_2^0 e^{\lambda_k t} \begin{bmatrix} K_1(\lambda_k) \\ K_2(\lambda_k) \\ K_3(\lambda_k) \\ K_\omega(\lambda_k) \end{bmatrix} + M_3^0 e^{\lambda_3 t} \begin{bmatrix} K_1(\lambda_3) \\ K_2(\lambda_3) \\ K_3(\lambda_3) \\ K_\omega(\lambda_3) \end{bmatrix} \quad (6)$$

Аналіз характеристичного рівняння. Становить певний інтерес провести деякий аналіз характеристичного рівняння (4).

1.3 розгляду рівняння (4) з'ясовується, що його можна записати у вигляді

$$A(a+b) + \sqrt{ab}B\sqrt{ab} = 0.$$

Дивлячись на доданки рівняння, можна побачити, що із рівняння можливо винести щось загальне, якщо $a=b$. Це впливає з відомої нерівності $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$, у якій знак рівності правочинний тільки при $a=b$. Виносячи за дужки $(a+b)$, вираз $(a+b)[\quad]$ дає корінь, якщо $a=b=0$. Таким чином, переходячи до прийнятих в рівнянні (4) позначень, маємо

$$\left(\frac{\lambda^2}{C^2} + \frac{1}{I_2} \right) = \left(\frac{\lambda^2}{C_3} + \frac{1}{I_3} \right) = 0.$$

Це означає, що рівність можлива при $\frac{C_2}{I_2} = \frac{C_3}{I_3}$, тобто при рівності або пропорційності мас і коефіцієнтів жорсткостей, отже, і рівності циклових або колових частот

$$\omega_0 = \sqrt{-\frac{C_2}{I_2}} = \sqrt{-\frac{C_3}{I_3}}, \text{ звідки } \lambda = \pm i\omega_0.$$

У цьому випадку в рівнянні (4) a та b можна винести за дужки, усередині яких залишиться рівняння третього порядку

$$(\lambda^2 + \omega_0^2) \left\{ \left[\frac{\lambda}{I_1} + \frac{\lambda^2}{C_1} \left(\lambda + \frac{\Gamma}{I_1} \right) \right] \left(\frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} \right) + \frac{1}{C_2} \left(\lambda + \frac{\Gamma}{I_1} \right) \left(\frac{\lambda^2}{C_3} + \frac{1}{I_3} \right) \right\} = 0. \quad (7)$$

Рівняння (7) у фігурних дужках найбільш просто й точно розв'язується при $I_1 = I_2 = I_3 = I$ та при $C_1 = C_2 = C_3 = C$. При цьому воно перетворюється в такий вираз

$$\lambda^3 + \frac{\Gamma}{I}\lambda^2 + \frac{C}{I}\left(\lambda + \frac{\Gamma}{3I}\right) = 0. \quad (8)$$

Можна помітити, що хід розв'язку рівняння (8) залежить від величини відношення $\frac{C}{I} \gg 1$. При $\frac{C}{I} \rightarrow 0$ одержуємо $\lambda = -\frac{\Gamma}{I}$, а при $\frac{C}{I} \rightarrow \infty$ з останнього (8) маємо $\lambda = -\frac{\Gamma}{3I}$, тобто корені рівняння (8) знаходяться у межах $-\frac{\Gamma}{3I} < \lambda < -\frac{\Gamma}{I}$. Для розв'язку рівняння (8) зведемо його до безрозмірного вигляду, ввівши позначення:

$$\lambda = \frac{\Gamma}{I}x \quad \text{і} \quad \alpha = \frac{CI}{\Gamma^2},$$

тоді маємо:

$$x^3 + x^2 + \alpha\left(x + \frac{1}{3}\right) = 0 \quad (9)$$

Кубічне рівняння (9) розв'язується за відомою формулою Кардана [2], поклавши $y = x + \frac{1}{3}$. Тоді

$$y^3 + \frac{3\alpha-1}{3}y + \frac{2}{27} = 0. \quad (10)$$

Позначаючи $\frac{3\alpha-1}{3} = 3p$ та $\frac{2}{27} = 2q$, отримаємо

$$y^3 + 3py + 2q = 0$$

Якщо дискримінант рівняння $D = q^2 + p^3 = 3^{-4}\alpha[3\alpha^2 - 3\alpha + 1] > 0$ більше нуля, як у цьому випадку, то маємо один дійсний і два комплексних корені:

$$y_1 = U + V;$$

$$y_2 = -\frac{1}{2}(U + V) + \frac{i\sqrt{3}}{2}(U - V);$$

$$y_3 = -\frac{1}{2}(U + V) - \frac{i\sqrt{3}}{2}(U - V);$$

де:

$$U = \sqrt[3]{-\frac{1}{27} + \frac{1}{9}\sqrt{\alpha(3\alpha^2 - 3\alpha + 1)}}; \quad V = \sqrt[3]{-\frac{1}{27} - \frac{1}{9}\sqrt{\alpha(3\alpha^2 - 3\alpha + 1)}}.$$

Для перевірки покладемо $\alpha \rightarrow 0$, тоді $V = U = -\frac{1}{3}$; $y_1 = -\frac{2}{3}$;
 $x_1 = y - \frac{1}{3} = -1$.

При $\alpha \rightarrow \infty$: $U \rightarrow -V$; $U + V \rightarrow 0$; $y_1 = 0$; $x_1 = -\frac{1}{3}$.

Належить простежити за ходом суми $U + V$ у функції α , що формує значення коренів характеристичного рівняння. При збільшенні α значення $U \rightarrow \sqrt{\alpha}$, але завжди залишається нижче $\sqrt{D}$, а значення $U \rightarrow -\sqrt{\alpha}$, залишаючись нижче $-\sqrt{D}$.

Сума $U + V$ завжди буде від'ємною, чим визначається стійкість механічного руху системи.

Припустимо, що коефіцієнти жорсткості системи великі $C_j \rightarrow \infty$, тоді нехтуючи в рівнянні (4) величинами $\frac{\lambda^2}{C_j}$ маємо

$$\frac{\lambda}{I_1} \left(\frac{1}{I_2} + \frac{1}{I_3} \right) + \frac{1}{I_2 I_3} \left(\lambda + \frac{\Gamma}{I_1} \right) = 0, \quad (11)$$

$$\text{Звідки } \lambda_1 = -\frac{\Gamma}{I_1 + I_2 + I_3}.$$

Допустимо далі, що тільки $C_{2,3} \rightarrow \infty$, тоді $I_2 + I_3 = I$, і отримане рівняння третього порядку буде мати вигляд, що відповідає двомасовій моделі нашої системи

$$\left[\frac{\lambda^3}{C_1} + \frac{\lambda^2}{C_1} \cdot \frac{\Gamma}{I_1} \right] + \left[\lambda \left(\frac{1}{I_1} + \frac{1}{I} \right) + \frac{\Gamma}{I_1 I} \right] = 0. \quad (12)$$

З рівняння (12) також випливає, що при $C_1 \rightarrow \infty$:

$$\lambda_1 = -\frac{\Gamma}{I_1 + I_2 + I_3}.$$

При малих $C_1 \rightarrow 0$ у рівнянні (12) будуть великі два перші доданки, у зв'язку із чим маємо:

$$\frac{\lambda^2}{C_1} \left(\lambda + \frac{\Gamma}{I_1} \right) \approx 0; \quad \lambda_1 = -\frac{\Gamma}{I_1}.$$

Таким чином, при слабкому зв'язку C_1 швидкість зростання кутової швидкості двигуна визначається тільки його конструктивною

характеристикою Γ і динамічним параметром I_1 . З останнього можливо упевнитися, що перший малий корінь λ_1 визначає швидкість розгону системи, він завжди повинен бути дійсним і менше нуля.

Допустимо, що треба знайти корені $|\lambda| \gg \frac{\Gamma}{I_1}$. Тоді замінимо

$\lambda + \frac{\Gamma}{I_1} \rightarrow \lambda$ і частотне рівняння (4) зведеться до виразу

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\lambda^2}{C_1} + \frac{1}{I_1} \right) \left(\frac{\lambda^2}{C_2} + \frac{1}{I_2} \right) + \left(\frac{\lambda^2}{C_1} + \frac{1}{I_1} \right) \left(\frac{\lambda^2}{C_3} + \frac{1}{I_3} \right) + \\ & + \left(\frac{\lambda^2}{C_2} + \frac{1}{I_2} \right) \left(\frac{\lambda^2}{C_3} + \frac{1}{I_3} \right) = 0 \end{aligned} \quad (13)$$

Неважко побачити, що рівняння (13) є біквдратним і легко розв'язується в числах. Проведений аналіз характеристичного або частотного рівняння (4) дає можливість розробити схему розв'язання рівняння п'ятого порядку. При значному розходженні частоти розгону

двигуна $|\lambda_1| = \frac{\Gamma}{I_1} \cong 10 \div 15 \text{ с}^{-1}$ й парціальних частот $\sqrt{\frac{C_j}{I_j}} \cong 50 \div 70 \text{ с}^{-1}$

приймаємо таку схему розв'язку, при якій спочатку визначаємо приблизно значення кореня λ_1 з рівняння (11), корені λ_{2-5} – із біквдратного рівняння (13), а потім уточнюємо їхні значення за методом ітерацій Ньютона.

Подальша перевірка уточнених коренів показала достатню точність зроблених обчислень

$$(-1)^5 \prod_1^5 \lambda_j = \frac{a_6}{a_1}.$$

У нашій роботі підтверджується відзначений у літературі факт, що при наявності в системі k мас характеристичне рівняння з моментом двигуна у функції кутової швидкості буде мати порядок $2k-1$ (для нашого випадку він дорівнює п'яти (непарний порядок)). Підтверджується й те, що один із коренів є дійсним числом і меншим нуля, а інші корені – комплексно-спряжені з від'ємною дійсною частиною.

На перший погляд суперечливим уявляється та обставина, що корені λ_{2-5} у системі без урахування демпфірування є не чисто мними, а комплексними з невеликою дійсною частиною, що

з'явилася лише в результаті уточнення коренів. З'ясуємо це на прикладі.

Представимо, що маємо агрегат із двигуном, момент інерції мас якого дорівнює I_1 , момент рушійних сил дорівнює M , який змінюється у функції кутової швидкості, як і у нашому розглянутому випадку, і що вал із коефіцієнтом жорсткості c різко застопорили. Диференціальне рівняння обертання такої одномасової моделі має вигляд:

$$I_1 \ddot{\phi} = M - c\phi. \quad (14)$$

Увівши лінійну функцію моменту двигуна

$$M = M_n \frac{\omega_0 - \omega_1}{\omega_0 - \omega_n} = \Gamma(\omega_0 - \omega_1) = \Gamma(\omega_0 - \dot{\phi}),$$

отримаємо неоднорідне диференціальне рівняння:

$$\ddot{\phi} + \frac{\Gamma}{I_1} \dot{\phi} + \frac{c}{I_1} \phi = \frac{\Gamma}{I_1} \omega_0 \quad (15)$$

Розв'язок характеристичного рівняння

$$\lambda^2 + \frac{\Gamma}{I_1} \lambda + \frac{c}{I_1} = 0 \quad (16)$$

отримаємо у формі

$$\lambda_{1,2} = -\frac{\Gamma}{2I_1} \pm i \sqrt{\frac{c}{I_1} - \left(\frac{\Gamma}{2I_1}\right)^2}. \quad (17)$$

Позначаючи $\frac{\Gamma}{2I_1}$ через δ , $\frac{c}{I_1}$ через ω_0^2 , будемо мати

$$\lambda_{1,2} = -\delta \pm i\omega_1, \text{ де } \omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}.$$

Загальний розв'язок однорідного рівняння, що відповідає (15), буде таким:

$$\phi = A_{1,2} e^{(-\delta \pm i\omega_1)t} \quad (18)$$

Вигляд розв'язку (18) свідчить про те, що в системах, які описуються рівнянням (15), мають місце згасальні коливання, декремент яких залежить від величини дійсної частини кожного з коренів.

Поява в рівняннях (3) або (15) члена, пропорційного кутовій швидкості $\dot{\phi}$, є формальною ознакою демпфірування системи. У досліджуваній нами системі такою ознакою слугує величина Γ/I_1 . Відносна мализна цієї величини спричиняє й мализну дійсної частини

при комплексних коренях, що з'явилася лише у підсумку уточнення за методом ітерацій.

Як ми вже відзначали вище, для одержання частинних розв'язків лінійної динамічної системи необхідно знайти її відгук на зовнішній момент, тобто отримати амплітуди й фази наведених моментів. Використовуючи принцип суперпозиції, шукали спочатку реакцію системи на один зовнішній момент M_2 , поклавши $M_3 = 0$, потім аналогічно – на M_3 , склавши обидва результати. Досить істотним при цьому представляється правильний аналітичний вираз моментів зовнішніх сил.

Аналіз осцилограм тензометрування моменту на третьому валу показав, що його можна з достатньою для практики точністю представити у вигляді

$$M_3 = M_{cp} + M_3^0 \sin \omega \cdot t,$$

де $\omega = 100$ рад/с – реальна колова частота процесу коливань моменту;

$M_{cp} = 150$ Нм – середнє значення постійної складової;

$M_3^0 = 100$ Нм – максимальне амплітудне значення синусоїди.

Для забезпечення можливості аналітичного виразу зовнішнього моменту M_2 подрібнювального апарату був здійснений спеціальний експеримент. На розривній машині за допомогою спеціального пристосування на пристрої, що реєструє сили і переміщення, була отримана діаграма сили різання стебел кукурудзи (рис.2), яка може бути з достатнім наближенням апроксимована синусоїдальною півхвилею.

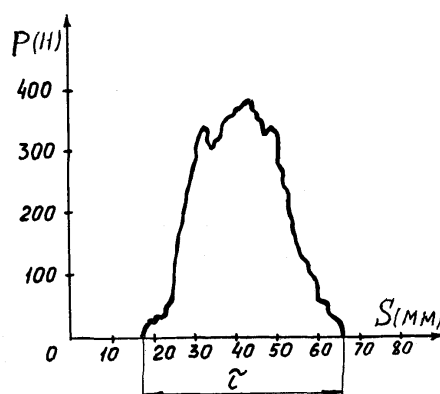


Рис. 2. Діаграма сили різання стебел кукурудзи

Беручи до уваги реальну конструкцію ротора подрібнювача, й, з огляду на технологічну схему роботи апарата, неважко переконатися,

що сила різання при подрібнюванні носить імпульсний характер. Тривалість синусоїдального імпульсу τ в 5-6 разів (залежно від товщини матеріалу, що переробляється) менше періоду його повторення T .

З метою використання принципу суперпозиції для лінійних систем розкладемо синусоїдальний імпульс у гармонічний ряд Фур'є на довжині всього періоду T . Для цього представимо функцію моменту на валу подрібнювача виразом

$$f(t) = A \sin \frac{\pi}{\tau} t \quad \text{при } 0 < t < \tau,$$
$$f(t) = 0 \quad \text{при } \tau < t < T$$

де A – амплітудне значення моменту.

Гармонічний ряд у загальному вигляді може бути представлений [2]

$$S(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_1^{\infty} \left(a_k \cos k \frac{2\pi}{T} t + b_k \sin k \frac{2\pi}{T} t \right), \quad (19)$$

де

$$a_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos k t dt,$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin k t dt,$$

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_0^T \sin \frac{\pi}{\tau} t dt.$$

Визначимо невідомі коефіцієнти Фур'є a_k, b_k й постійний член a_0 . Для цієї мети інтегруємо вирази

$$a_k = \frac{2A}{T} \int_0^T \sin \frac{\pi}{\tau} t \cos k \frac{2\pi}{T} t dt, \quad (20)$$

яке при використанні табличного інтеграла після ряду перетворень буде мати вигляд

$$a_k = 2 \frac{A}{\pi} \cdot \frac{\tau}{T} \cdot \frac{1}{1 - \left(2k \frac{\tau}{T} \right)^2} \left(1 + \cos k \frac{2\pi}{T} \tau \right) \quad (21)$$

Для другого коефіцієнта b_k отримаємо

$$b_k = \frac{2}{T} A \int_0^T \sin \frac{\pi}{\tau} t \sin k \frac{2\pi}{T} t dt = 2 \cdot \frac{A}{\pi} \cdot \frac{\tau}{T} \cdot \frac{1}{1 - \left(2k \frac{\tau}{T}\right)^2} \sin k \frac{2\pi}{T} \tau. \quad (23)$$

Вільний член має вигляд

$$a_0 = \frac{2}{T} A \int_0^{\tau} \sin \frac{\pi}{\tau} t dt = \frac{2}{T} A \frac{\tau}{\pi} (1 - \cos \pi) = 4 \frac{A}{\pi} \cdot \frac{\tau}{T} \quad (24)$$

В остаточній формі ряд представляється виразом

$$S(t) = 2 \frac{A}{\pi} \cdot \frac{\tau}{T} + 2 \frac{A}{\pi} \cdot \frac{\tau}{T} \sum_1^{\infty} \frac{1}{1 - \left(2k \frac{\tau}{T}\right)^2} \left[\left(1 + \cos k \frac{2\pi}{T} \tau\right) \cos k \frac{2\pi}{T} t + \sin k \frac{2\pi}{T} \tau \sin k \frac{2\pi}{T} t \right].$$

Для судження про збіжність ряду проведемо оцінку убутання його членів. Розглянемо вирази, що формують убутання:

$$a_k^1 = \frac{1 + \cos k \frac{2\pi}{T} \tau}{1 - \left(2k \frac{\tau}{T}\right)^2}; \quad b_k^1 = \frac{\sin k \frac{2\pi}{T} \tau}{1 - \left(2k \frac{\tau}{T}\right)^2}. \quad (25)$$

Їх можна представити, як функції аргументу $\alpha = k \frac{2\tau}{T}$

$$a_k^1 = \frac{1 + \cos \pi \alpha}{1 - \alpha^2}; \quad b_k^1 = \frac{\sin \pi \alpha}{1 - \alpha^2}.$$

Визначимо, де ці коефіцієнти стануть малими: $\alpha = \left\{ \frac{2\tau}{T} \rightarrow \infty \right\}$.

При $\alpha = 0 \Rightarrow a_k^1 = 2$; $b_k^1 = 0$; при $\alpha = 1 \Rightarrow a_k^1 = \frac{0}{0}$; $b_k^1 = \frac{0}{0}$;

Розкриємо невизначеності типу $\frac{0}{0}$ за правилом Лапіталя, взявши похідні:

$$a_k^1(1) = \frac{-\pi \sin \pi \alpha}{2\alpha} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\sin \pi \alpha}{\alpha} = 0,$$

$$b_k^1(1) = \frac{\pi \cos \pi \alpha}{-2\alpha} = \frac{\pi}{2}.$$

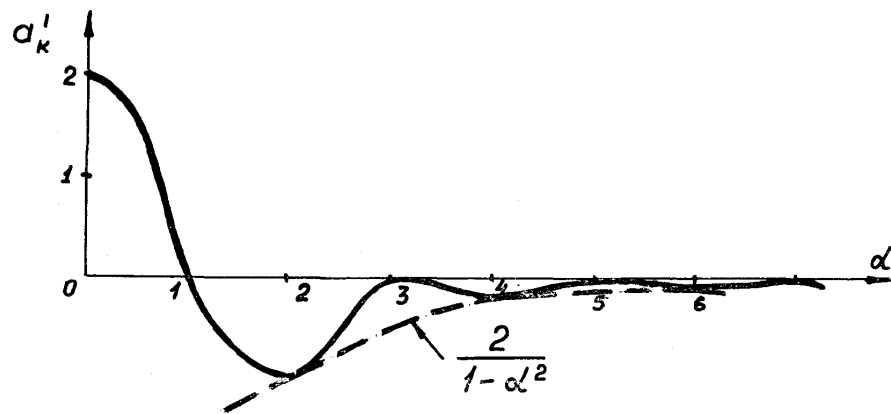


Рис. 3. Характер убутання коефіцієнта a_k .

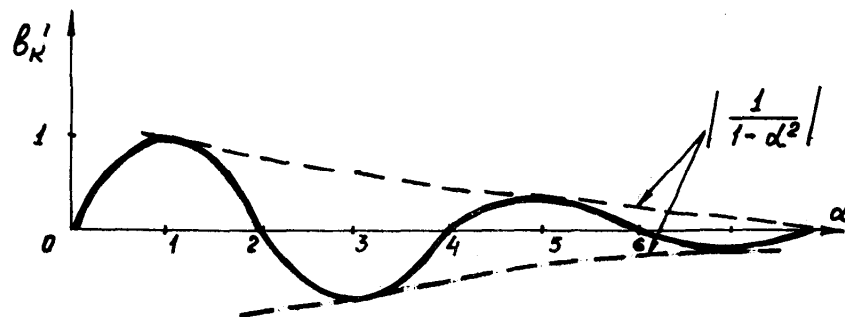


Рис. 4 Характер убутання коефіцієнта b_k .

Як можна побачити (рис. 3 і 4), убутання величин амплітуд членів a_k^1 пропорційно $\frac{2}{1-\alpha^2}$, а для членів b_k^1 пропорційно $\left(\frac{1}{1-\alpha^2}\right)$.

Якщо прийняти точність до 10%, тобто

$$\frac{1}{1-\alpha^2} \cong \frac{1}{\alpha^2} = 0,1. \text{ Тоді } \alpha = 3,16. \text{ Звідси } k = \frac{\alpha T}{2\tau} \approx 8, \text{ де } \frac{T}{\tau} = 5.$$

Таким чином, число кратних гармонік, які потрібно взяти при заданій точності, повинне бути не менше восьми.

Провівши розрахунок реакції системи на момент M_3 і на кожен з гармонічних складових ряду Фур'є моменту M_2 , одержуємо частинні розв'язки диференціальних рівнянь для шуканих величин $\omega_1, M_{10}, M_{02}, M_{03}$. Додаючи частинні розв'язки із загальним розв'язком однорідних рівнянь, одержуємо загальні розв'язки неоднорідних диференціальних рівнянь.

Висновки. У роботі підтверджується відзначений у літературі факт, що при наявності в системі k мас, характеристичне рівняння буде мати порядок $2k-1$, якщо момент двигуна виражений в функції кутової швидкості, (для нашого випадку він дорівнює п'яти). Підтверджується й те, що один із коренів є дійсним числом і меншим нуля, а інші корені – комплексно-спряжені з від'ємною дійсною частиною.

Поява в рівняннях (3) або (15) члена, пропорційного кутовій швидкості $\dot{\phi}$, є формальною ознакою демпфірування системи. Відносна мализна цієї величини спричиняє й малість дійсної частини при комплексних коренях, що з'явилася лише у підсумку уточнення за методом ітерацій.

Проведений аналіз характеристичного або частотного рівняння (4) надає можливість розробити схему розв'язку цього алгебраїчного рівняння п'ятого порядку.

Список літератури

1. Кожевников С.Н. Динамика нестационарных процессов в машинах / С.Н. Кожевников – К.: Наукова думка, 1986. – 285 с.
2. Бронштейн И.Н., Справочник по высшей математике / И.Н. Бронштейн, К.А. Семендяев – М.: Физматгиз, 1987. – 458 с.
3. Кожевников С.Н. Основания структурного синтеза механизмов / С.Н. Кожевников – К.: Наукова думка, 1979. – 232 с.
4. Ривин Е.И. Динамика привода станков / Е.И. Ривин – М.: Машиностроение, 1996. – 174 с.

Литвинов О.И. Динамический расчет комбинированных машин

Анализируется математическая модель механической системы сложных комбинированных машин с упругими звеньями и дискретными массами.

Ключевые слова: динамика, модель, метод, машина, дифференциальное уравнение, упругость, надежность.

Summary

Lytvynov O.I. Dynamic calculation of combined machines

Examines the mathematical model of mechanical system complex combined machines with elastic waves and discrete masses.

Keywords: dynamic, model, method, apparatus, differential equation, elasticity, durability.