УДК 831.621.01

ВИКОРИСТАННЯ РІВНЯНЬ ЛАГРАНЖА ДРУГОГО РОДУ ДЛЯ ДОСЛІДЖЕННЯ МЕХАНІЧНИХ СИСТЕМ

О.М. Гаркавий, факультет механізації сільського господарства
Науковий керівник – О.І. Литвинов, к.т.к, доц.
ВП Національного університету біоресурсів і природокористування України «Ніжинський агротехнічний інститут»

У науковій праці отримані диференціальні рівняння коливань одновісного підресореного причепа на пневматичних шинах, який разом з енергетичним засобом рухається по нерівній дорозі, профіль якої описаний заданим рівнянням.

Коливання, стійкість рівноваги, потенціальна енергія, кінетична енергія, ступінь вільності, диференціальне рівняння, критерій, мінор, дискримінант.

Відомо, що всяке так зване тверде тіло має пружність, тому будучи деформоване та потім представлене дії пружних сил, починає вібрувати, причому окремі його частини здійснюють коливальні рухи біля своїх рівноважних положень. Звідси, розповсюдженість коливальних рухів в природі та їх велика важливість в техніці зрозуміла. З явищами коливань доводиться рахуватись в сільськогосподарському машинобудуванні, в будівельних конструкціях інженерних споруд та транспортних засобів. Вивчення явищ коливань та боротьба зі шкідливими наслідками цих явищ або використання у технологічних цілях – це такі проблеми, що наполегливо висуваються технікою перед інженерами та вченими. Теорія малих коливань стала в наш час вельми важливим розділом механіки, а вітротехніка – самостійною і важливою галуззю інженерних знань.

Відмітимо, що говорити про коливальний рух системи біля положення рівноваги можна тільки в тому випадку, коли рівновага положення системи стійка. Якщо рівновага системи нестійка, тобто, якщо при найменшому відхиленні від рівноважного положення система все більше від нього віддаляється, то неможна вести мову про малі коливання системи біля положення рівноваги. Тому, приступаючи до вивчення теорії малих коливань системи, ми повинні зупинитися на питанні про стійкість рівноваги з тим, щоб навчитися відрізняти стійкі рівноважні стани від нестійких.

А.М. Ляпунов у знаменитому творі «Загальна задача про стійкість руху» дав строге визначення стійкості стану положення рівноваги:

«Стійким положенням рівноваги системи називається таке її положення, коли при достатньо малому початковому відхиленні від нього та при достатньо малих початкових швидкостях всі точки системи, маючи скільки завгодно малі швидкості, будуть рухатись таким чином, що всі вони не відхиляться від свого рівноважного положення далі наперед заданої відстані, якою б малою вона не була».

Стійке положення рівноваги системи залежить від її потенціальної енергії. Потенціальна енергія матеріальної системи для стаціонарного силового поля і стаціонарних в'язей є деякою функцією узагальнених координат

$$\Pi = \Pi\left(q_1, q_2, ..., q_S\right), \tag{1}$$

де s – число ступенів вільності системи.

Розкладаючи вираз потенціальної енергії в ряд Маклорена за степенями узагальнених координат в околі положення рівноваги, де $q_j = 0$, маємо

$$\Pi = \Pi(0) + \sum_{j=1}^{S}\left(\frac{\partial \Pi}{\partial q_j}\right)_0 q_j + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{S}\sum_{j=1}^{S}\left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_i \partial q_j}\right)_0 q_i q_j + ... \tag{2}$$

Не порушуючи загальності, можна прийняти, що потенціальна енергія системи в положенні рівноваги дорівнює нулю $\Pi(0) = 0$. Перші частинні похідні потенціальної енергії за узагальненими координатами є узагальненими силами, які в положенні рівноваги дорівнюють нулю, тому

$$\left(\frac{\partial \Pi}{\partial q_j}\right)_0 = 0; \ \sum_{j=1}^{S}\left(\frac{\partial \Pi}{\partial q_j}\right)_0 q_j = 0. \qquad (3)$$

Вважаємо, що в положенні рівноваги потенціальна енергія має мінімум. Це є достатньою умовою стійкості положення рівноваги і друга похідна від потенціальної енергії за узагальненою координатою буде додатною. В результаті нехтування в виразі (2) всіх членів порядку вище другого знайдемо

$$\Pi = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{S}\sum_{j=1}^{S}\left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_i \partial q_j}\right)_0 q_i q_j. \qquad (4)$$

В подальшому введемо позначення коефіцієнтів при других степенях узагальнених координат

$$\left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_i \partial q_j}\right)_0 = c_{ij} \ \ (ij = 1,2,..., S). \qquad (5)$$

Звідси, наближений вираз для потенціальної енергії системи представиться наступною формулою:

$$\Pi = \frac{1}{2}(c_{11}q_1^2 + ... + c_{ss}q_s^2 + 2c_{12}q_1q_2 + ... + 2c_{(s-1)s}q_{s-1}q_s) + ...$$

або

$$\Pi = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{S}\sum_{j=1}^{S} c_{ij} q_i q_j. \qquad (6)$$

Формула (6) показує, що потенціальну енергію системи можна наближено подати однорідною квадратичною функцією узагальнених координат. Сталі симетричні величини c_{ij}, що входять в формулу (6), називаються коефіцієнтами жорсткості. На закінчення слід відмітити, що потенціальна енергія системи визначається за формулою (6) з точністю до величин другого порядку мализни включно.

У галузі техніки інженер має звичайно справу з коливаннями і вібраціями надто малої амплітуди. У деяких випадках коливання виявляються тільки чутливими приладами, що не зменшує їхні можливі небажані наслідки для надійності і довговічності. Тому інженер повинен підходити до цього питання з точки зору гарантування безпечної величини амплітуди вібрації.

Необхідну і достатню умову стійкості рівноваги системи з кінцевим числом ступенів вільності надає теорема Лангранжа-Діріхле, в якій стійкому рівноважному положенню відповідає мінімум потенціальної енергії.

Потенціальна енергія консервативної системи з "s" ступенями вільності виражається відомою формулою (6).

Для визначення умов, при яких дана квадратична форма буде строго додатною, необхідно скористатись критерієм Сильвестра про знаковизначеність квадратичної форми: для того, щоб квадратична форма була строго додатною, необхідно та достатньо, щоб головні мінори її дискримінанта були додатні:

$$c_{11} > 0; \quad \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix} > 0; \quad \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \ldots & c_{1S} \\ c_{21} & c_{22} & \ldots & c_{2S} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{S1} & c_{S2} & \ldots & c_{SS} \end{vmatrix} > 0. \tag{7}$$

Тут прийняті наступні позначення:

$$c_{11} = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_1^2}; \; c_{22} = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_2^2}; \qquad c_{SS} = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_S^2};$$

$$c_{12} = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_1 \partial q_2}; \; c_{23} = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_2 \partial q_3} \text{ і т. д.} \tag{8}$$

При цьому слід мати на увазі: $c_{12} = c_{21}$; $c_{23} = c_{32}$ і т. д.

Як видно з головних мінорів дискримінанта, зі збільшенням числа ступенів вільності системи дослідження стійкості рівноваги таких систем значно ускладнюється.

Для дослідження коливального руху матеріальної системи за допомогою рівнянь Лагранжа другого роду необхідно знати її кінетичну енергію. Вираз кінетичної енергії для системи з "s" ступенями вільності має вигляд

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{S} \sum_{j=1}^{S} a_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j, \tag{9}$$

де a_{ij} – незалежні від часу додатні симетричні відносно індексів сталі величини, що називаються коефіцієнтами інерції, розмірності яких співпадають з розмірністю маси або моменту інерції мас системи;

$\dot{q}_i, \dot{q}_j$ – узагальнені швидкості точок системи.

Отже, в разі стаціонарних в’язей кінетична енергія матеріальної системи є квадратичною формою узагальнених швидкостей. Якщо система має один ступінь вільності $s = 1$, то на підставі виразу (9) запишемо

$$T = \frac{1}{2} a \dot{q}^2.$$

Якщо система має два ступеня вільності $s = 2$, то із виразу (9)

$$T = \frac{1}{2} \left(a_{11} \dot{q}_1^2 + 2 a_{12} \dot{q}_1 \dot{q}_2 + a_{22} \dot{q}_2^2 \right). \tag{10}$$

Як відомо, коливання системи в реальних умовах згасають, оскільки на її точки діють сили опору середовища, завдяки чому відбувається розсіювання механічної енергії системи.

Припустимо, що сили опору, що діють на окремі точки системи, пропорційні першим степеням швидкостей, тобто, вони є лінійною функцією швидкостей

$$\overline{R}_i = -\mu_i \overline{\upsilon}_i, \tag{11}$$

де μ_i – сталий коефіцієнт пропорційності або коефіцієнт опору, що визначається експериментально.

За відомим правилом знайдемо узагальнені сили опору у випадку стаціонарних в'язей матеріальної системи

$$Q_{1R}=\sum_{i=1}^{n}R_i\frac{\partial\bar{r}_i}{\partial q_1};\ Q_{2R}=\sum_{i=1}^{n}R_i\frac{\partial\bar{r}_i}{\partial q_2};\qquad Q_{SR}=\sum_{i=1}^{n}R_i\frac{\partial\bar{r}_i}{\partial q_S}. \tag{12}$$

Швидкість кожної точки системи

$$\bar{\upsilon}_i=\frac{d\bar{r}_i}{dt}=\frac{\partial\bar{r}_i}{\partial q_1}\dot{q}_1+\frac{\partial\bar{r}_i}{\partial q_2}\dot{q}_2+...+\frac{\partial\bar{r}_i}{\partial q_S}\dot{q}_S. \tag{13}$$

Для подальших викладок нам знадобиться перша тотожність Лагранжа

$$\frac{\partial\bar{\upsilon}_i}{\partial\dot{q}_j}=\frac{\partial\bar{r}_i}{\partial q_j}. \tag{14}$$

Підставивши значення R_i та $\dfrac{\partial\bar{r}_i}{\partial q_j}$ у вирази узагальнених сил опору, маємо

$$Q_{1R}=-\frac{\partial}{\partial\dot{q}_1}\sum_{i=1}^{n}\frac{\mu_i\upsilon_i^2}{2};\ Q_{2R}=-\frac{\partial}{\partial\dot{q}_2}\sum_{i=1}^{n}\frac{\mu_i\upsilon_i^2}{2};\qquad Q_{SR}=-\frac{\partial}{\partial\dot{q}_S}\sum_{i=1}^{n}\frac{\mu_i\upsilon_i^2}{2}. \tag{15}$$

Введемо нову скалярну функцію

$$\varPhi=\sum_{i=1}^{n}\frac{\mu_i\upsilon_i^2}{2}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\mu_i\bar{v}_i\cdot\bar{v}_i}{2}. \tag{16}$$

Ця функція називається дисипативною функцією Релея або функцією розсіювання енергії. Вона аналогічна за своєю структурою кінетичній енергії системи, але замість коефіцієнтів інерції у вираз дисипативної функції входять коефіцієнти опору середовища.

Виразимо функцію Релея через узагальнені координату і швидкість q та $\dot{q}$, враховуючи, що радіуси-вектори точок системи і їхні похідні дорівнюють

$$\bar{r}_i=\bar{r}_i(q_1,q_2,...,q_s);\quad \dot{\bar{r}}_i=\bar{v}_i=\sum_{j=1}^{s}\frac{\partial\bar{r}_i}{\partial q_j}\dot{q}_j.$$

Звідси, у випадку стаціонарних в'язей дисипативна функція є додатною квадратичною функцією узагальнених швидкостей

$$\varPhi=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{S}\sum_{j=1}^{S}b_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j,$$

де

$$b_{ij}=b_{ji}=\sum_{i=1}^{s}\mu_i\frac{\partial\bar{r}_i}{\partial q_j}\cdot\frac{\partial\bar{r}_i}{\partial q_j},$$

$$\varPhi=\frac{1}{2}(b_{11}\dot{q}_1^2+b_{22}\dot{q}_2^2+...+b_{ss}\dot{q}_s^2+2b_{12}\dot{q}_1\dot{q}_2+...+2b_{s-1}\dot{q}_{s-1}\dot{q}_s). \tag{17}$$

Отже, функція розсіювання енергії є однорідною функцією узагальнених швидкостей зі сталими коефіцієнтами опору , що залежать тільки від узагальнених координат. Фізичний зміст функції розсіювання полягає у наступному: розсіювання повної механічної енергії за одиницю часу у випадку консервативної системи дорівнює подвоєному значенню дисипативної функції Релея. Якщо матеріальна система має один ступінь вільності, то із виразу (16)

$$\varPhi = \frac{1}{2} b(q)\dot{q}^2.$$

Якщо матеріальна система має два ступеня вільності, то

$$\varPhi = \frac{1}{2}(b_{11}\dot{q}_1^2 + 2b_{12}\dot{q}_1\dot{q}_2 + b_{22}\dot{q}_2^2). \tag{18}$$

Тоді узагальнені сили опору представляються формулами:

$$Q_{1R} = -\frac{\partial \varPhi}{\partial \dot{q}_1};\; Q_{2R} = -\frac{\partial \varPhi}{\partial \dot{q}_2}; \qquad Q_{SR} = -\frac{\partial \varPhi}{\partial \dot{q}_S}. \tag{19}$$

Рівняння Лагранжа другого роду з урахуванням сил опору запишеться

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_n}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_n} = -\frac{\partial \varPi}{\partial q_n} - \frac{\partial \varPhi}{\partial \dot{q}_n}, \tag{20}$$

Розглянемо приклад застосування рівнянь Лагранжа другого роду для випадку руху підресореного одновісного причепу на пневматичних шинах вздовж нерівної дороги, профіль якої заданий рівнянням. Для цього складемо диференціальні рівняння коливання причепа під час руху по дорозі з нерівностями, що описуються рівнянням $h = h_O\left(1 - \cos\frac{2\pi x}{l}\right)$, де (так зване, кінематичне збудження коливань). Врахувати, що при коливаннях причепа в ресорах виникають сили тертя, пропорційні швидкості вертикального зміщення $F = \alpha\left(\dot{y} - \dot{y}_1\right)$(рис. 1).

Де $x = \upsilon t$ – горизонтальна координата точки O кріплення причепа при його рівномірному русі,

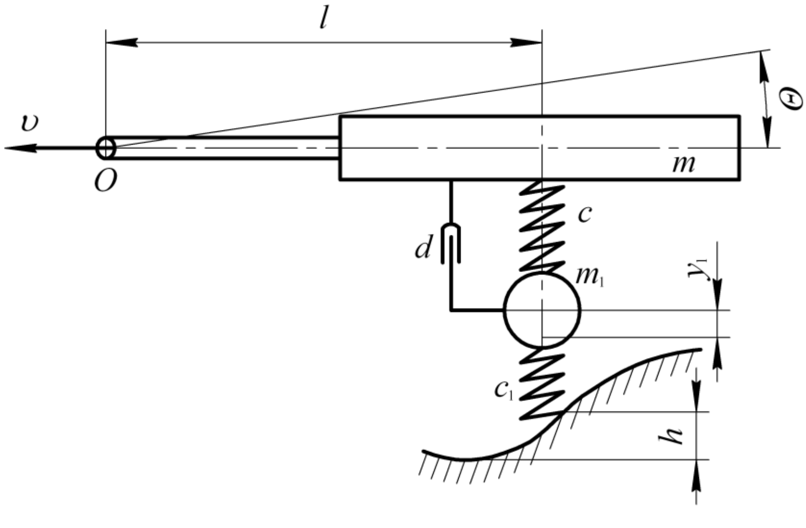

Рис. 1

h – висота нерівностей дороги,

α – коефіцієнт опору в ресорах (коефіцієнт тертя).

$\dot{y} - \dot{y}_1$ – різниця вертикальних проекцій швидкостей причепа і центра колеса.

Кінетична енергія причепа як системи з двома ступенями вільності складається із суми енергій поступального руху самого причепа, коливального руху або повороту відносно центра кріплення і енергії мас коліс

$$T = \frac{1}{2} m\upsilon^2 + \frac{1}{2} I_o \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m_1 \dot{y}_1^2, \tag{20}$$

де m – маса причепа;
m_1 – маса коліс,
I_o – момент інерції маси причепа відносно осі, що проходить через точку кріплення причепа до машини (точка O),
υ – швидкість буксирування,
$\theta, \dot{\theta}$ – кут повороту причепа відносно поперечної осі, що перетинає точку O кріплення причепа до тягача і кутова швидкість цього повороту.

Потенціальна енергія системи, яка визначається пружною деформацією ресор причепа і шин коліс, дорівнює

$$\Pi = \frac{1}{2} c\left(l\theta - y_1\right)^2 + \frac{1}{2} c_1\left(y_1 - h\right)^2,$$

де c – коефіцієнт жорсткості ресор; c_1 – коефіцієнт жорсткості шин коліс.

Дисипативна функція (функція розсіювання енергії при перетворенні його у тепло) представиться формулою

$$\Phi = \frac{1}{2} \alpha\left(l\dot{\theta} - \dot{y}_1\right)^2.$$

Оскільки механічна система має два ступеня вільності, то приймаємо дві узагальнені координати y_1 та Тоді два рівняння Лагранжа з урахуванням дисипативної функції мають вигляд

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{y}_1}\right) - \frac{\partial T}{\partial y_1} = -\frac{\partial \Pi}{\partial y_1} - \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{y}_1}; \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \theta} = -\frac{\partial \Pi}{\partial \theta} - \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{\theta}}.$$

Підставляючи вирази похідних для T, П та Φ у рівняння Лагранжа, остаточно маємо

$$m_1\ddot{y}_1 - \alpha\left(l\dot{\theta} - \dot{y}_1\right) - c\left(l\theta - y_1\right) + c_1\left(y_1 - h\right) = 0,$$
$$I_o\ddot{\theta} + \alpha\left(l\dot{\theta} - \dot{y}_1\right)l + c\left(l\theta - y_1\right)l = 0.$$

Це і є шукані диференціальні рівняння коливання причепа з кінематичним збудженням від нерівностей дороги.

При відсутності сили тертя рівняння набудуть вигляду:

$$m_1\ddot{y}_1 - c\left(l\theta - \dot{y}_1\right) + c_1\left(y_1 - h\right) = 0,$$
$$I_o\ddot{\theta} + c\left(l\theta - y_1\right)l = 0.$$

В научной работе получены дифференциальные уравнения колебаний одноосного подрессоренного прицепа на пневматических шинах, который вместе с энергетическим средством движется по неровной дороге, профиль которой описанный заданным уравнением.

Колебания, стойкость равновесия, потенциальная энергия, кинетическая энергія, степень свободы, дифференциальное уравнение, критерий, минор, дискриминан.