ОГЛЯД МІНІМАЛЬНИХ ПОВЕРХОНЬ ТА ЇХ ІНТЕРПРЕТАЦІЯ НА ОСНОВІ МИЛЬНИХ ПЛІВОК

Т.О.Литовченко, студент відділення з підготовки молодших спеціалістів, «Обслуговування комп'ютерних систем і мереж», 3 курс
Науковий керівник – І.О Коровіна, канд. техн. наук, старший викладач
ВП Національного університету біоресурсів і природокористування України «Ніжинський агротехнічний інститут»

Анотація: *в статті наведено огляд мінімальних поверхонь, описано їх інтерпретацію за допомогою мильних плівок. Показано можливість побудови мінімальних поверхонь засобами комп'ютерної алгебри та наведено приклад такої побудови з лістингом відповідної програми.*

Ключові слова: мінімальна поверхня, мильні плівки, задача Плато, середня кривина

Мінімальна поверхня – це поверхня нульової середньої кривизни. Дослідження таких поверхонь почалося з робіт Пуассона і Плато. Згідно з теоремою Пуассона, середня кривизна поверхні розділу двох фізичних середовищ, що знаходяться в рівновазі, пропорційна різниці тисків в цих середовищах. Якщо тиски однакові – поверхня розділу середовищ буде мінімальною, при ненульовій різниці маємо поверхні сталої середньої кривини.

Прикладами мінімальних поверхонь можуть служити мильні бульбашки(різниця тисків відмінна від нуля, середня кривизна постійна і відмінна від нуля) і мильні плівки, що затягують дротяні контури (тиски однакові, середня кривизна дорівнює нулю). Мильні плівки уперше були детально вивчені Жозефом Плато.

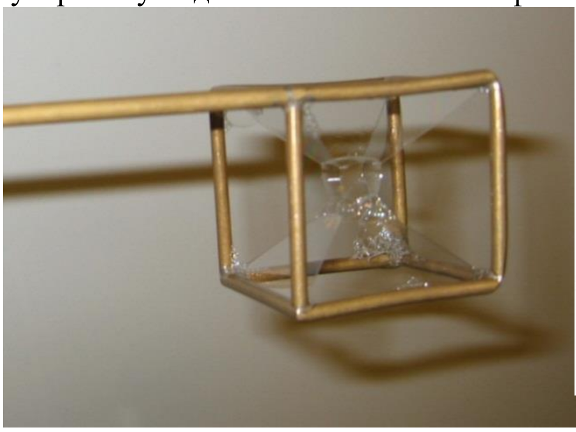


Рис.1. Мильна плівка на складному дротяному контурі. Містить фрагменти поверхні нульової середньої кривизни, а також фрагменти пухирів.

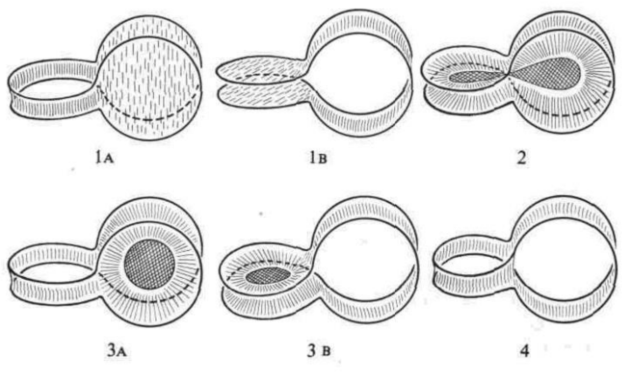


Рис. 2. Декілька різних мінімальних поверхонь, що затягують один і той же дротяний контур(так званий контур Дугласа).

З фізичної точки зору ясно, що мильна плівка прагне зайняти в просторі положення, що відповідає екстремуму енергії, яка в даному випадку пропорційна площі поверхні. Тому, з математичної точки зору, мильні плівки описуються як критичні точки функціонала площі. Мінімальні поверхні - критичні точки функціонала площі, що розглядається на класі поверхонь, що затягують один і той же контур(граничне завдання), відносно малих деформацій поверхні.

Ж. Лагранж, який першим почав досліджувати мінімальні поверхні, розглядав наступну варіаційну задачу: знайти поверхню найменшої площі, яка б проходила через заданий контур. Пізніше ця задача отримала назву задачі Плато. Лагранж показав, що в такому випадку середня кривина поверхні має дорівнювати нулеві в усіх її точках. Задачею Плато в свій час займалися майже всі видатні вчені 19-20 ст., зокрема, Монж Г., Ріман Ф., Вейєрштрасс К., Шварц К. та інші.

Оссерман в 50-х рр. минулого століття систематизував відомі мінімальні поверхні. Зокрема, ним було знайдено рівняння мінімальних поверхонь в непараметричному вигляді, на основі якого можна отримати класичні приклади мінімальних поверхонь: гелікоїд, катеноїд, поверхню Шерка.

Рис. 3. Гелікоїд та катеноїд.

У 1776 р. Ж. Мєньє описав гелікоїд – гвинтову поверхню, яку опише пряма, яка обертається з постійною кутовою швидкістю навколо нерухомої осі під постійним кутом та одночасно рухається поступово з постійною швидкістю вздовж цієї осі. Так, подвійні спіраль ДНК геометрично описується так званим подвійним гелікоїдом.

На даний момент відомо більше десятка мінімальних поверхонь, деякі з них давно застосовуються в техніці. Серед них можна виділити наступні:

Поверхня Шерка була знайдена ним у 1835 році та стала третьою мінімальною поверхнею після катеноїда та гелікоїда, які були відомі вже у 17 ст. (рис. 4).

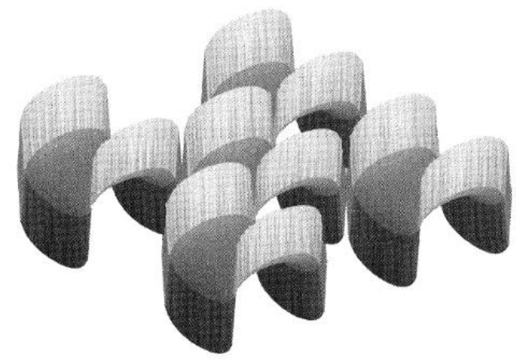


Рис.4. Поверхня Шерка.

Рис. 5. Поверхня Каталана (1843 р.)

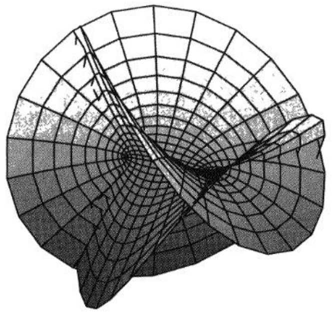


Рис. 6. Поверхня Ханненберга

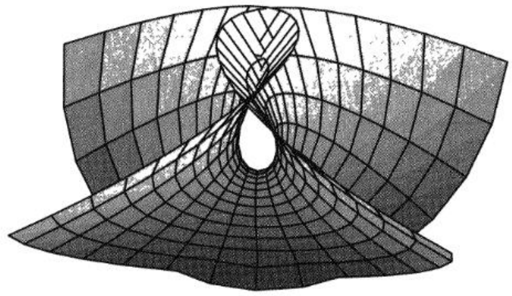
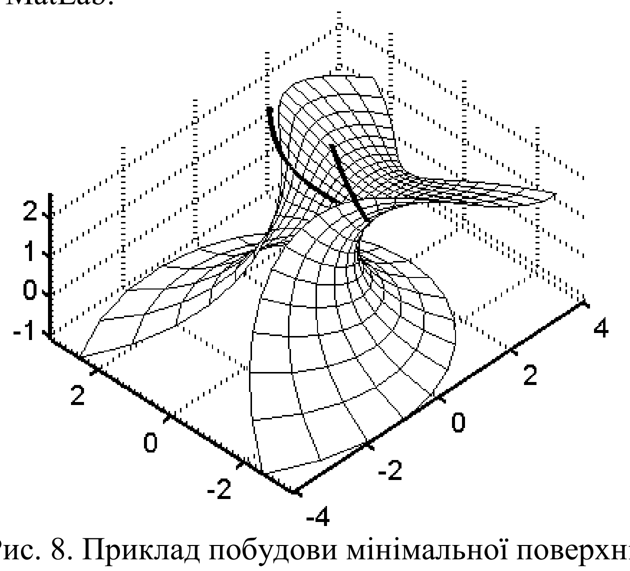


Рис. 7. Поверхня Еннепера

Мінімальні поверхні знайшли своє застосування в архітектурі та техніці при конструюванні куполів, тентових оболонок (виставкові центри та тентові покриття, куполи церков та архітектурні прикраси), балонів високого тиску для зберігання газів. Найчастіше знаходження їх аналітичних рівнянь можна здійснити лише наближеними методами, що можна зробити за допомогою потужних математичних процесорів таких як Matlab або Maple. На рис. 8 представлено приклад мінімальної поверхні та записано текст програми, створеної у середовищі процесора MatLab:



.Рис. 8. Приклад побудови мінімальної поверхні.

```
[u,v]=meshgrid(-3*pi/10:pi/30:3*pi/10,-3*pi/10:pi/30:3*pi/10);
x=cos(u).*cosh(v)-cosh(v).*sin(u).*sin(v).*sinh(u)/sqrt(2)- cos(u).*cos(v).*cosh(u).*sinh(v)/sqrt(2)
y=sin(u).*cosh(v)+cosh(v).*cos(u).*sin(v).*sinh(u)/sqrt(2)-
sin(u).*cos(v).*cosh(u).*sinh(v)/sqrt(2);
z=cos(v).*cosh(u)-v/sqrt(2);
mesh(x,y,z)
hold on
t=[-3*pi/10:pi/20:3*pi/10];
```

```
x1=cos(t);
y1=sin(t);
z1=cosh(t);
plot3(x1,y1,z1)
```

Висновок: Сучасний розвиток комп'ютерної математики дозволяє розв'язати ті задачі, які раніше через трудомісткість та об'єм цього процесу було неможливо вирішити. Зокрема, задачу знаходження та побудови мінімальних поверхонь та поверхонь ненульової середньої кривини. Розв'язання теоретичних питань в свою чергу приводить до розширення спектру застосування математичних об'єктів та задач.

Список літератури

1. Вилейтнер Г. История математики от Декарта до середины XIX столетия / Г. Вилейтнер. – М.: Наука, 1966. – 507 с.
2. Дао Чонг Тхи. Минимальные поверхности и проблема Плато / Дао Чонг Тхи, А.Т. Фоменко. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987. – 312 с.
3. Ермолов В.В. Пневматические строительные конструкции / В.В. Ермолов, У.У. Бэрд, Э. Бубнер и др. – М.: Стройиздат, 1983. – 439 с.
4. Минимальные поверхности / Под ред. Р. Оссермана; Пер. с английского. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. – 352 с.

Аннотация: *в статье приведен обзор минимальных поверхностей, представлена их интерпретация при помощи мыльных пленок. Показана возможность построения минимальных поверхностей средствами компьютерной алгебры и приведен пример такого построения с листингом соответствующей программы.*

Ключевые слова: минимальная поверхность, мыльные пленки, задача Плато, средняя кривизна

Abstract: *the paper provides an overview of minimal surfaces, presented their interpretation with soap films. The possibility of construction of minimal surfaces using computer algebra and is an example of such a system with a listing of the program.*

Keywords: minimal surfaces, soap film, problem Plateau, mean curvature

REVIEW OF MINIMAL SURFACES AND THEIR INTERPRETATION ON THE BASIS OF SOAP FILMS

T. Lytovchenko, I. Korovina