УДК 531/ 534(075.8)

ДО МЕТОДОЛОГІЇ ДОСЛІДЖЕННЯ ЕЛЕКТРОМЕХАНІЧНИХ СИСТЕМ

Литвинов О.І. , к.т.н., доц., завідувач кафедри загальнотехнічних дисциплін
ВП НУБіП України «Ніжинський агротехнічний інститут»
Василюк В.І., к.т.н., доц.кафедри експлуатації машин та технічного сервісу
ВП НУБіП України «Ніжинський агротехнічний інститут»

В роботі висвітлюються методи дослідження руху електромеханічних систем, які базуються на працях Лагранжа, Максвелла, Ляпунова. Наведені електромеханічні аналогії і приклади дослідження конкретних систем.

Енергія, форма руху, диференціальне рівняння, механіка, електродинаміка, закон гравітації, електричний заряд.

Вступ. Історія наукових досліджень постійно нагадує про єдність законів природи, про закони збереження енергії різноманітних форм руху матерії – механічної, електричної, теплової, хімічної та ін. Проте, не лише закони збереження, а й теорема про зміну повної механічної енергії – це окремі випадки загального закону збереження і еквівалентного перетворення матерії і енергії, відкритого М.В. Ломоносовим. Якщо, приміром, робота не потенціальних сил додатна, то відбувається прилив механічної енергії внаслідок відповідного зменшення енергії інших немеханічних форм (теплової, електричної). Якщо ця робота від'ємна, то відбувається розсіювання (дисипація) механічної енергії, яка переходить в енергії інших видів.

У свою чергу, всі закономірності, що характеризують процеси перетворення і збереження матерії і руху в різних формах, є конкретними проявами загального закону збереження матерії і руху, який має величезне наукове і методологічне значення, оскільки є природничонауковою основою матеріалізму. Стверджуючи, що матерія і рух не створюються і не знищуються, що матерія, яка рухається, здатна до різних перетворень, і розглядаючи матерію в органічному зв'язку з рухом, загальний закон збереження матерії і руху є доказом єдності світу і загальності руху.

Закон збереження матерії і руху в усіх своїх конкретних проявах є теоретичною основою різних досліджень у природознавстві і техніці, пов'язаних з перетворенням матерії і руху з однієї форми в іншу. В цьому може бути і причина того, що спостерігається дивовижна схожість диференціальних рівнянь, які описують явища різної фізичної природи.

Аналіз фізичних аналогій. Велика роль теоретичної механіки як фундаментальної науки в дослідженнях процесів різної фізичної природи. Методи аналітичної механіки є універсальними та ефективними при розв'язанні багатьох задач електротехніки, починаючи зі складання контурних рівнянь електричних кіл і завершуючи моделюванням процесів на аналогових обчислювальних комплексах.

У сучасній науці розрізняють три фізичні концепції світу: механічну, електродинамічну і квантово-польову, відповідно до яких і виникли три основних теорії: механіка Ньютона, електродинаміка Максвелла і теорія відносності Ейнштейна. Але аналітична механіка є наукою, яка своїми методами наскрізь пронизує всі три картини світу.

Багато точних законів фізики можуть слугувати підтвердженням аналогічності рівнянь і виразів. Наприклад, структура всім відомих другого закону Ньютона, закону Гука і закону Ома є ідентичною:

$$m\vec{a} = \vec{F}; \qquad cx = F; \qquad Ri = U.$$

Спільним у цих виразах є те, що в них входять лише три величини, кожна з яких визначається і є незалежною.

Другий приклад. Візьмемо закон гравітації, відкритий Ньютоном, закон про взаємодію двох електричних зарядів, відкритий Кулоном, і закон взаємодії магнітних полів.

Закон всесвітнього притягання

$$F = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2},$$

де m_1, m_2 – маси взаємодіючих тіл, , γ – гравітаційна стала, r – відстань між тілами.

Аналогічний закон для електричних зарядів

$$F = \varepsilon \frac{q_1 q_2}{r^2},$$

де ε – відносна діелектрична проникність, q_1, q_2 – взаємодіючі електричні заряди, r – відстань між зарядами.

Закон взаємодії магнітних полів

$$F = \mu \frac{B_1 B_2}{r^2},$$

де μ – магнітна проникність, B_1, B_2 – магнітна індукція, r – відстань між джерелами магнітного поля.

Як легко побачити, структура алгебраїчних виразів цих законів повністю аналогічні, але фізична природа цих взаємодії є абсолютно різною.

Розглянемо приклад коливань тягаря масою m, підвішеного на вертикальній пружині з коефіцієнтом жорсткості c. Диференціальне рівняння вільних коливань цього тягаря має відомий вигляд

$$m\ddot{x} + cx = 0,$$

де x – переміщення тягаря.

Кожному параметру механічної системи можна поставити у відповідність параметр електричної системи і навпаки. Наприклад, інерційні властивості тіл в механічній системі залежать від маси і моментів інерції. В електричних системах існують аналоги цих понять – індуктивність і ємність. Диференціальне рівняння коливань електричного контуру, що складається з котушки індуктивності L і конденсатора ємності С, має аналогічний вигляд, як і для коливань тягаря.

$$L\ddot{q} + \frac{1}{C} q = 0,$$

де q – заряд конденсатора.

При дослідженні механічних матеріальних систем найчастіше застосовують рівняння Лагранжа другого роду. На практиці часто зустрічаються електромеханічні системи, механічний рух яких визначається силами електромагнітної природи. Максвелл [3] у своїй праці про електрику і магнетизм застосував рівняння Лагранжа другого роду для дослідження системи, що містила механічні елементи і провідники зі струмом.

Центральним рівнянням аналітичної механіки є рівняння Лагранжа другого роду, в якому базовою величиною є кінетична і потенціальна енергії. Ці рівняння слугують основою для перенесення методів аналітичної механіки на електродинаміку у формі рівнянь Лагранжа-Максвелла, де замість кінетичної і потенціальної енергії оперують енергією електричного і магнітного полів.

Таким чином, аналітична механіка є єдиною наукою, яка дає спільний апарат – рівняння Лагранжа-Максвелла для складання диференціальних рівнянь електромеханічних систем, які є основою сучасної техніки, бо сьогодні важко уявити прилад чи машину, де б були тільки механічні елементи.

Рівняння Лагранжа-Максвелла в узагальнених координатах. Складання рівнянь Лагранжа-Максвелла передбачає, що стан електромеханічної системи описується узагальненими координатами механічної частини, кількість яких у голономних системах дорівнює числу ступенів вільності механізму, і узагальненими координатами електричної частини, які визначають стан електричної частини системи.

Узагальнені механічні координати позначимо $q_i(q_1, q_2, ..., q_n)$, де число n дорівнює кількості ступенів вільності механізму. За узагальнені механічні координати, як і в першій частині книги, вибираємо лінійні або кутові параметри ланок.

Узагальнені електричні координати позначимо $g_k(g_1, g_2, ..., g_m)$, де число m дорівнює кількості електричних ступенів вільності. За узагальнені електричні координати вибираємо кількості електрики (заряди).

Похідні за часом від узагальнених механічних координат уявляють узагальнені швидкості $\dot{q}_i$, а похідні за часом від узагальнених електричних уявляють узагальнені струми $\dot{g}_k$.

Рівняння Лагранжа-Максвелла для електромеханічних систем мають вигляд

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i, \qquad i = 1,2,...,n, \tag{1}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{g}_k}\right) - \frac{\partial L}{\partial g_k} = Q_k, \qquad k = 1,2,...,m. \tag{2}$$

У цих рівняннях літера L є функцією Лагранжа-Максвелла, яка дорівнює сумі «електричної» функції Лагранжа L_E і «механічної» функції Лагранжа L_M:

$$L = L_E + L_M.$$

«Механічна» функція Лагранжа, як відомо, рівна різниці кінетичної T і потенціальної енергії Π механічної системи

$$L_M = T + \Pi.$$

«Електрична» функція Лагранжа для механізмів з електроприводом співпадає з магнітною енергією системи

$$L_E = \frac{1}{2}\sum_{r,s=1}^{\infty} L_{rs} i_r i_s,$$

де r та s – незалежних електричних контурів (витків, обмоток), по яких протікають струми i_r та i_s; L_{rs} при $r \neq s$ – взаємна індуктивність (коефіцієнт взаємоіндукції), а при $r = s$ – індуктивність (коефіцієнт самоіндукції).

Узагальнена або зведена сила Q_i визначається, що було вказано в першій частині книги, як скалярна величина, рівна коефіцієнту при варіації цієї узагальненої координати у виразі елементарної роботи сил.

Узагальнена «сила» Q_k визначається за аналогією з Q_i, як скалярна величина, що дорівнює коефіцієнту при варіації цієї «електричної» узагальненої координати у виразі елементарної роботи електричних сил

$$\delta A = \sum_{k=1}^{m} (E_{r,s} - R_{r,s} i_{r,s}) \delta g_k, \tag{3}$$

де $E_{r,s}$ – електро-рушійна сила контуру,

$R_{r,s}$ – електричний опір контуру.

Приклад 1. Електромагнітний прилад складається із рухомої котушки певної маси, що обертається у сталому магнітному полі, який утворює інша нерухома котушка, що складають одна з одній послідовний електричний ланцюг.

На рухому котушку діє пара сил з боку пружини з коефіцієнтом жорсткості c. В обертальній парі рухомої котушки має місце в’язке тертя з коефіцієнтом опору β.

За узагальнені координати системи приймаємо кут повороту рухомої котушки φ та струм i, що протікає крізь обмотки котушок. Тоді «механічна» функція Лагранжа приймає вигляд

$$L_M = \frac{1}{2}(J\dot{\varphi}^2 - c\varphi^2),$$

де J – момент інерції рухомої котушки відносно осі обертання.

«Електрична» функція Лагранжа має вигляд

$$L_E = \frac{1}{2}(L_1 + L_{12} + L_2) i^2,$$

де індекс 1 стосується рухомої котушки, а індекс 2 – нерухомої.

За умови симетрії взаємна індуктивність $L_{12} = L_{21}$. Позначимо їх суму (повний коефіцієнт взаємної індуктивності) через *2M* і приймемо до уваги, що цей коефіцієнт залежить від взаємного розміщення котушок, тобто від кута повороту рухомої котушки φ. Звичайно приймають

$$M = M_o \sin\varphi,$$

де кут повороту φ відраховується від положення, при якому котушки перпендикулярні. Індуктивність котушок L_1, L_2 вважаємо сталими величинами.

Таким чином, остаточно функція Лагранжа-Максвелла має вигляд

$$L = \frac{1}{2}[(L_1 + L_2 + 2M_o \sin\varphi) i^2 + J\dot{\varphi}^2 - c\varphi^2]. \tag{4}$$

Узагальнена сила Q_i знаходиться із виразу елементарної роботи сил тертя на можливому переміщенні системи (робота сил пружності пружини врахована при складанні виразу потенціальної енергії):

$$\delta A = -\beta\dot{\varphi}\delta\varphi \quad \Rightarrow Q_i = -\beta\dot{\varphi},$$

де β – коефіцієнт опору у функції розсіювання енергії.

Узагальнена сила Q_k знаходиться із виразу елементарної роботи «електричних сил»

$$\delta A = (E - iR)\delta i \quad \Rightarrow Q_k = E - iR,$$

де R – сумарний опір обмоток котушок,

E – зовнішня електрична рушійна сила.

Рівняння Лагранжа-Максвелла:

$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}) - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = -\beta\dot{\varphi}, \quad (5)$$

$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial i}) = E - iR. \quad (6)$$

Визначимо похідні від функції Лагранжа-Максвелла:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = J\dot{\varphi}; \quad \frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}) = J\ddot{\varphi}; \quad \frac{\partial L}{\partial \varphi} = M_o i^2 \cos\varphi - c\varphi;$$

$$\frac{\partial L}{\partial i} = (L_1 + L_2 + 2M_o \sin\varphi)i;$$

$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial i}) = (L_1 + L_2 + 2M_o \sin\varphi)\frac{di}{dt} + 2M_o i\dot{\varphi}\cos\varphi.$$

Підставимо в останні рівняння значення похідних. У підсумку отримаємо остаточно рівняння Лагранжа-Максвелла

$$\begin{gathered} J\ddot{\varphi} - M_o i^2 \cos\varphi + c\varphi = - - \beta\dot{\varphi}, \\ (L_1 + L_2 + 2M_o \sin\varphi)\frac{di}{dt} + 2M_o i\dot{\varphi}\cos\varphi = E - iR. \end{gathered} \quad (7)$$

Сумісне розв'язання цих двох рівнянь дозволяє отримати шукані функції зміни узагальнених координат за часом

$$\varphi = \varphi(t); \quad i = i(t).$$

Приклад 2. За допомогою електродвигуна сталого струму з незалежним збудженням і параметрами: $J_{зв}$ – зведений момент інерції; $M_{зв}$ – зведений момент сил (задані параметри є функціями кута повороту ротора електродвигуна) рухається вхідна ланка механізму.

Скласти рівняння Лагранжа-Максвелла для заданої електромеханічної системи.

Позначимо індуктивності обмоток збудження і якоря літерами $L_з, L_я,$ взаємну індуктивність через $L_{зя}, L_{яз} = M,$ струми в обмотках збудження і якоря, відповідно, через $i_з, i_я.$ Тоді функція Лагранжа-Максвелла отримує вигляд:

$$L = \frac{1}{2}(L_з i_з^2 + L_я i_я^2 + 2Mi_я i_з + J_{зв}\dot{\varphi}^2). \quad (8)$$

Якщо вважати струмінь в обмотці збудження сталим, то стан заданої електромеханічної системи визначається двома узагальненими координатами:

φ – кут повороту якоря електродвигуна,

$i_я$ – струмінь в обмотці якоря електродвигуна.

Узагальнені координати як функції часу можуть бути знайдені із рівнянь Лагранжа-Максвелла

$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}) - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = M_{зв}; \quad (9)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial i_я}\right) = U - i_я R_я; \tag{10}$$

де U – напруження, прикладене до обмотки якоря,

$R_я$ – опір обмотки якоря.

Під час диференціювання функції Лагранжа-Максвелла вважаємо індуктивності $L_з, L_я$ сталими, а взаємну індуктивність M – залежною від кута повороту якоря φ.

Виконуючи диференціювання, отримаємо

$$\frac{\partial L}{\partial \dot\varphi} = J_{зв}\dot\varphi; \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot\varphi}\right) = J\ddot\varphi + \dot\varphi^2 \frac{dJ_{зв}}{d\varphi};$$

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = \frac{dM}{d\varphi} i_я i_з + \frac{1}{2}\dot\varphi^2 \frac{dJ_{зв}}{d\varphi}; \quad \frac{\partial L}{\partial i_я} = L_я i_я + M_з i_з;$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial i}\right) = L_я \frac{di_я}{dt} + \frac{dM}{d\varphi}\dot\varphi i_з.$$

Тепер рівняння Лагранжа-Максвелла приймають вигляд

$$\begin{aligned} J\ddot\varphi + \frac{1}{2}\dot\varphi^2 \frac{dJ_{зв}}{d\varphi} - \frac{dM}{d\varphi} i_я i_з &= M_{зв}; \\ L_я \frac{di_я}{dt} + \frac{dM}{d\varphi}\dot\varphi i_з &= U - i_я R_я. \end{aligned} \tag{11}$$

Сумісний розв’язок цих двох рівнянь дозволяє визначити шукані функції $\varphi = \varphi(t); \quad i_я = i_я(t)$.

Дослідження динаміки складних машин. Обґрунтування динамічної моделі. Розглянемо далі дослідження механічних систем. В роботі поставлена задача провести динамічні дослідження механічних систем механізмів приводу, силових ліній складних машин типа причіпних комбайнів, наприклад, кукурудзозбиральних, кормозбиральних, бурякозбиральних, привод яких здійснюється від валу відбору потужності енергетичного засобу через кардан до центрального редуктора комбінованої машини, а потім розгалужується до різних робочих органів.

Трансмісія таких комбінованих машин є складною згинально-крутильною динамічною системою з великим числом розподілених і зосереджених мас, з’єднаних елементами, які мають певні пружно-інерційні характеристики. Вивчення таких систем пов’язано з великими труднощами математичного характеру. Проте, практичні задачі динамічного дослідження допускають можливості значного спрощення еквівалентних моделей.

Не викривляючи основних закономірностей дійсних динамічних процесів, можна замінити реальний механізм його еквівалентною моделлю, яка складена із абсолютно жорстких дискретних мас і без інерційних пружних елементів, і представити реальну систему з великим числом ступенів вільності динамічно еквівалентною спрощеною схемою з кінцевим числом ступенів вільності.

Порядок перетворення реальної матеріальної системи і отримання динамічних характеристик елементів моделі наступний. Перш за все, визначаються моменти інерції мас і крутильні піддатливості всіх конструктивних елементів комбайнів, використовуючи розрахунково-експериментальні методи. Піддатливості визначаються в основному розрахунковим шляхом. В необхідних випадках враховується згинальна піддатливість валів и опор, яка зводиться до крутильної.

В результаті проведених операцій отримується складна схема с великим числом мас різного порядку мализни. Нехтуючи масами,які на порядок менші, об'єднуючи ті, жорсткість в'язів між якими на порядок вище інших, і зводячи систему до головного валу, виходячи з умови рівності кінетичної і потенціальної енергії, отримаємо систему с 8-10 ступенями вільності, ще досить складну для розрахунків. Подальше зменшення числа ступенів вільності проводиться з урахуванням збереження частот низьких тонів коливань, які, як показують експериментальні дослідження, є домінуючими при формуванні динамічних навантажень.

В результаті проведення перелічених операцій складну матеріальну систему комбайнів можна звести до більш простої тримасової розгалуженої крутильно-коливальної системи із збереженням двох перших форм коливань (рис.1).

Приймемо такі позначення:

I_1, I_2, I_3 – зведені до головного вала моменти інерції енергетичного засобу і двох основних мас комбайна;

C_1, C_2, C_3 – зведені до головного вала коефіцієнти жорсткості еквівалентних валів;

$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_0$ – кути повороту мас і центра розгалуження;

M_1, M_2, M_3 – зведені до головного вала моменти зовнішніх сил.

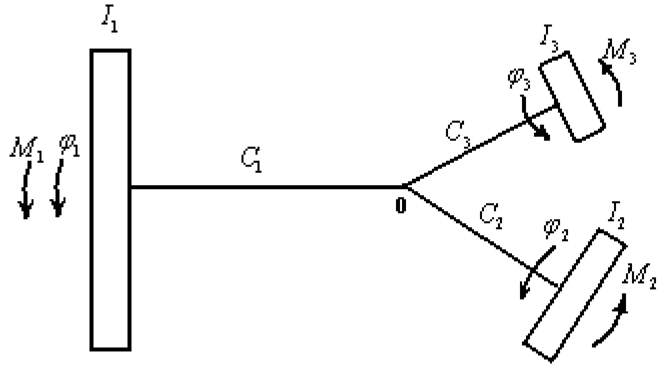

Рис. 1. Еквівалентна схема трансмісії комбайна

Прийнято, що момент двигуна змінюється в функції кутової швидкості (характеристика знята експериментально):

$$M_1 = M_н \frac{\omega_0 - \omega_1}{\omega_0 - \omega_н}, \tag{12}$$

де $M_н$ – зведений номінальний момент, $\omega_0, \omega_н$ – кутові швидкості холостого ходу і номінальна.

Формалізація моделі. Загальний розв'язок диференціальних рівнянь руху. Вихідна система диференціальних рівнянь, яка складена методом Лагранжа в другій формі, має вигляд:

$$\begin{aligned} I_1\ddot{\varphi}_1 + C_1(\varphi_1 - \varphi_0) &= M_1, \\ I_2\ddot{\varphi}_2 + C_2(\varphi_2 - \varphi_0) &= M_2, \\ I_3\ddot{\varphi}_3 + C_3(\varphi_3 - \varphi_0) &= M_3. \end{aligned} \tag{13}$$

Враховуючи, що відносні кутові переміщення мас $\varphi_1 - \varphi_0$, або деформації в'язей пропорційні відповідним силам пружності $M_{10},\ldots$,

$$(\varphi_1 - \varphi_0)C_1 = M_{10},$$

і виражаючи кутові переміщення φ_2 і φ_3 та їхні другі похідні через φ_1, а також приймаючи до уваги умови зчленування моментів сил пружності в центрі розгалуження, отримаємо систему диференціальних рівнянь в нових узагальнених координатах – моментах пружності на відповідних валах, доцільність застосування яких ретельно обґрунтована в роботах проф. С.М. Кожевнікова [2].

$$\begin{aligned}
&\dot{\omega}_1 + \frac{\Gamma}{I_1}\omega_1 + \frac{M_{10}}{I_1} = \frac{\Gamma}{I_1}\omega_0,\\
&\dot{\omega}_1 - \frac{\ddot{M}_{10}}{C_1} + \frac{\ddot{M}_{20}}{C_2} + \frac{M_{20}}{I_2} = \frac{M_2}{I_2},\\
&\dot{\omega}_1 - \frac{\ddot{M}_{10}}{C_1} + \frac{\ddot{M}_{30}}{C_3} + \frac{M_{30}}{I_3} = \frac{M_3}{I_3},\\
&M_{10} + M_{20} + M_{30} = 0.
\end{aligned} \tag{14}$$

Отримана система диференціальних рівнянь (14), яка встановлює залежність між моментами сил пружності на окремих ділянках зведеної системи, описує поведінку машинного агрегату при дослідженні динамічних процесів. Загальний розв'язок однорідних рівнянь будемо шукати у вигляді $A_j e^{\lambda t}$, де λ – ряд характеристичних чисел, при яких рівняння перетворюються у тотожність, A_j – сталі інтегрування, що визначаються початковим станом системи.

Підставляючи прийнятий розв'язок в систему (14), в якій праві частини покладені рівними нулю, прирівнюючи нулю и розкриваючи детермінант, складений із коефіцієнтів при шуканих сталих A_j, отримаємо характеристичне рівняння п'ятого порядку, корені якого визначають власні частоти коливань системи

$$\left[\frac{\lambda}{I_1} + \frac{\lambda^2}{C_1}\left(\lambda + \frac{\Gamma}{I_1}\right)\right]\left[\left(\frac{\lambda^2}{C_2} + \frac{1}{I_2}\right) + \left(\frac{\lambda}{C_3} + \frac{1}{I_3}\right)\right] + \left(\frac{\lambda^2}{C_2} + \frac{1}{I_2}\right)\left(\frac{\lambda^2}{C_3} + \frac{1}{I_3}\right)\left(\lambda + \frac{\Gamma}{I_1}\right) = 0. \tag{15}$$

Аналіз характеристичного рівняння для більш простих, в т.ч. і граничних випадків, дозволив встановити границі стійкості розв'язку системи, а також чисельно розв'язати його з подальшим уточненням коренів за методом ітерацій І. Ньютона, оцінити вплив дисипації на величину останніх. Із п'яти отриманих коренів рівняння перший, що визначає розгін системи, є дійсним, а решта чотири – комплексні взаємо-спряжені, вони визначають форми коливань системи.

Прийнявши одну із амплітуд (A_1) сталою і виразивши решту через неї, отримаємо передаточні коефіцієнти $K_j^{(n)}(\lambda_n)$. Загальний розв'язок системи однорідних диференціальних рівнянь уявимо у вигляді вектора [1]:

$$\vec{Y}_0(t) = \{\omega_1(t); M_{10}(t); M_{20}(t); M_{30}(t)\}. \tag{16}$$

Частинні розв'язки диференціальних рівнянь отримані з урахуванням правої частини, яка уявляє функції зовнішніх моментів. Приймаючи до уваги експериментальні діаграми сил, що формують зовнішні моменти в системі, враховуючи їхню реальну періодичність, уявляли зовнішнє навантаження у вигляді гармонічного ряду Фурье. Приймаючи принцип суперпозиції для лінійних систем, знаходимо реакцію системи на кожну гармонічну складову, сумуючи отримані результати.

Частинні розв'язки можуть бути представлені у вигляді

$$\vec{Y}_0(t)=\begin{vmatrix}M_{10}(t)\\M_{20}(t)\\M_{30}(t)\\\omega(t)\end{vmatrix}=M_2^0e^{\lambda_k t}\begin{vmatrix}K_1(\lambda_k)\\K_2(\lambda_k)\\K_3(\lambda_k)\\K_\omega(\lambda_k)\end{vmatrix}+M_3^0e^{\lambda_3 t}\begin{vmatrix}K_1(\lambda_3)\\K_2(\lambda_3)\\K_3(\lambda_3)\\K_\omega(\lambda_3)\end{vmatrix}. \qquad (17)$$

Висновки. Методи Лагранжа і Максвелла дозволяють ефективно досліджувати рух складних механічних і електромеханічних систем. Електродинамічні аналогії додатково підкреслюють єдність різних форм матерії, а також єдність матерії і руху.

Список літератури

1. Бронштейн И.Н. Справочник по высшей математике. // И.Н. Бронштейн, К.А. Семендяев – М.: Физматгиз, 1987. – 458 с.
2. Кожевников С.Н. Динамика нестационарных процессов в машинах. // С.Н. Кожевников – К.: Наукова думка, 1986. – 287 с.
3. Maxwell A. Treatise on Electricity and Magnetism. // Maxwell A – Oxford, 1873.

В работе освещаются методы исследования движения электромеханических систем, которые базируются на трудах Лагранжа, Максвелла. Приводятся электромеханические аналогии и примеры исследования конкретных систем.

Ключевые слова: энергия, форма движения, дифференциальные уравнения, механика, электродинамика, закон гравитации, электрический заряд.

In work and methods of research of electromechanical systems movement which are based on Lagranj, Maxwell researches are shined. Electromechanical analogies and examples of research of concrete systems resulted.

Keywords: energy, form movements, differential equation, mechanics, electrodynamics, law gravitation, electric charge.

EFFECTIVE METHODS OF ELECTROMECHANICAL SYSTEMS RESEARCH

O.I. Lytvynov, V.I. Vasyluk