УДК 514.18

ПАРАМЕТРИЧНІ РІВНЯННЯ ПРОСТОРОВИХ КРИВИХ ВІД НАТУРАЛЬНОГО ПАРАМЕТРА

КРЕЩЕНКО П.В.
Студент факультету електрифікації і автоматизації сільського господарства,
Науковий керівник МУКВИЧ М.М., к.т.н., доцент кафедри природничо-фундаментальних дисциплін
ВП Національного університету біоресурсів та природокористування України «Ніжинський агротехнічний інститут»

У статті показано загальний спосіб утворення параметричних рівнянь просторової кривої від натурального параметра. Розглянуто утворення параметричних рівнянь просторової кривої за даними функціями кута підйому та кривини кривої від натурального параметра. За знайденими рівняннями побудовано криві.

Ключові слова: просторова крива, довжина дуги, параметричні рівняння.

Постановка проблеми. Розв’язування більшості технічних задач неможливе без дослідження різноманітних траєкторій руху матеріальних точок та конструювання поверхонь технічних форм, які володіють наперед заданими властивостями. При цьому задання кривих ліній за допомогою функцій від довжини дуги (або натурального параметра) дозволяє застосувати супровідний тригранник та формули Френе, які широко використовуються в механіці. Важливими прикладними задачами є задачі моделювання руху матеріальної частинки по різноманітних поверхнях. Дослідження цього руху сучасними методами чисельного інтегрування і візуалізації дозволяють отримати імітаційну модель при відсутності натурних моделей таких поверхонь. У відомих роботах [1, 2] даного напряму досліджень використовуються рівняння траєкторій матеріальних точок від натурального параметра. Іншим, не менш важливим напрямом досліджень, є конструювання поверхонь, до визначника яких входять просторові криві. Їх задання параметричними рівняннями у функції довжини дуги має загальновідомі переваги в диференціальній геометрії та теорії поверхонь [5].

Аналіз останніх досліджень. Задачі, пов’язані із утворенням параметричних рівнянь, мають, на перший погляд, допоміжне значення для розв’язування більш складних задач геометрії та механіки. Але серед просторових кривих використовується обмежена кількість кривих (в основному гвинтова лінія та інші криві укосу), аналітичне задання яких не викликає труднощів. У цей же час навіть класичні способи утворення параметричних рівнянь від натурального параметра (довжини дуги) є невідомими для широкого кола майбутніх науковців.

Формулювання мети статті. Узагальнити способи утворення параметричних рівнянь просторових кривих від натурального параметра.

Основна частина. Серед відомих способів аналітичного задання кривих ліній у просторі вирізняють [4, 5]:

1. Аналітичне задання лінії ℓ – як лінії перетину двох поверхонь за відомими їх рівняннями: $F_1(x;y;z)=0,\ F_2(x;y;z)=0$:

$$\ell:\begin{cases}F_1(x;y;z)=0;\\F_2(x;y;z)=0.\end{cases} \tag{1}$$

2. Задання кривої ℓ за допомогою *векторного параметричного рівняння:*

$$\bar{r}=\bar{r}(t)=x(t)\cdot\bar{i}+y(t)\cdot\bar{j}+z(t)\cdot\bar{k}, \tag{2}$$

якому відповідають *скалярні параметричні рівняння:*

$$\begin{cases}x=x(t);\\y=y(t);\\z=z(t),\end{cases} \tag{3}$$

де t – параметр, який зручно трактувати у якості часу.

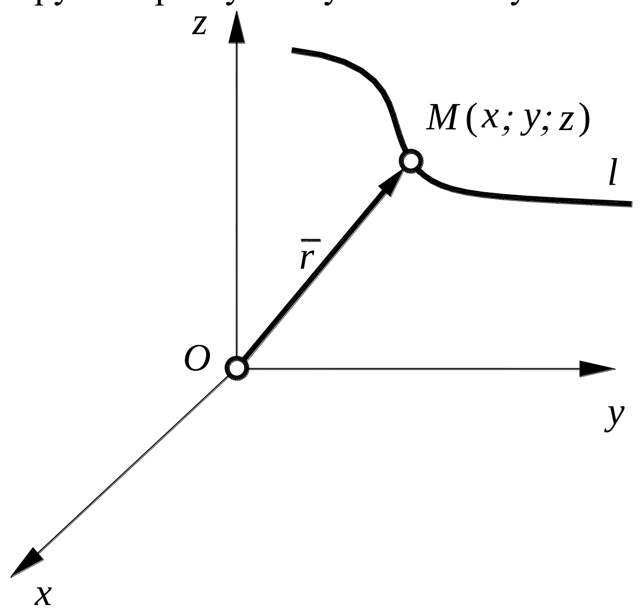


Рис.1. Просторова крива ℓ із радіусом-вектором $\bar{r}=\bar{r}(t)$.

При заданні просторової фігури параметричними рівняннями (2, 3), кожній точці $M(x;\,y;\,z)$ ставлять у відповідність радіус-вектор (або вектор-функцію) $\bar{r}=\bar{r}(t)$, який можна розкласти на орти $\bar{i},\ \bar{j},\ \bar{k}$ прямокутної системи координат *Oxyz*.

3. Аналітичне задання кривої ℓ за допомогою *натуральних рівнянь*:

$$\begin{cases} k = k(s); \\ \sigma = \sigma(s), \end{cases} \tag{4}$$

де $k = k(s)$ – кривина кривої, $\sigma = \sigma(s)$ – скрут кривої ℓ.

Натуральні рівняння (4) кривої отримують із рівностей [5]:

$$k(t) = \frac{\sqrt{\begin{vmatrix} y' & z' \\ y'' & z'' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z' & x' \\ z'' & x'' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix}^2}}{\left(x'^2 + y'^2 + z'^2\right)^{\frac{3}{2}}}; \quad \sigma(t) = \frac{\begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y' & z' \\ y'' & z'' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z' & x' \\ z'' & x'' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix}^2}. \tag{5}$$

та виразу для знаходження довжини дуги s кривої ℓ:

$$s = \int \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}\,dt, \tag{6}$$

якщо із рівностей (5) кривини і скруту кривої вдається виключити довільний параметр *t*. Слід зазначити, що натуральні рівняння (4), повністю задають криву в прямокутній системі координат *Oxyz*. Але використання натуральних рівнянь (4) від довжини дуги s викликає загальновідомі труднощі. Зокрема, для переходу від натуральних рівнянь кривої (4) до параметричних рівнянь (3), необхідно розв'язати систему із дев'яти диференціальних рівнянь, що вдається тільки в окремих випадках [5]. Серед просторових кривих, які мають натуральні рівняння, використовують найчастіше гвинтову лінію, функції кривини і скруту якої – сталі.

4. Якщо із виразу (6) для обчислення довжини дуги кривої $s = \int \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}\,dt$ вдається виразити $t = t(s)$, тоді отримують *параметричні рівняння кривої* ℓ *від натурального параметра* s (довжини дуги):

$$\begin{cases} x = x(t(s)); \\ y = y(t(s)); \\ z = z(t(s)). \end{cases} \tag{7}$$

Розглянемо способи утворення рівнянь (7) детальніше.

Знайдемо параметричні рівняння *гвинтової лінії* від натурального параметра. Як відомо [4, 5], *гвинтова лінія* утворюється рівномірним рухом точки по твірній кругового циліндра, якщо циліндр рівномірно обертається навколо своєї осі (гвинтовою лінією є зовнішня кромка різьби) (рис.2).

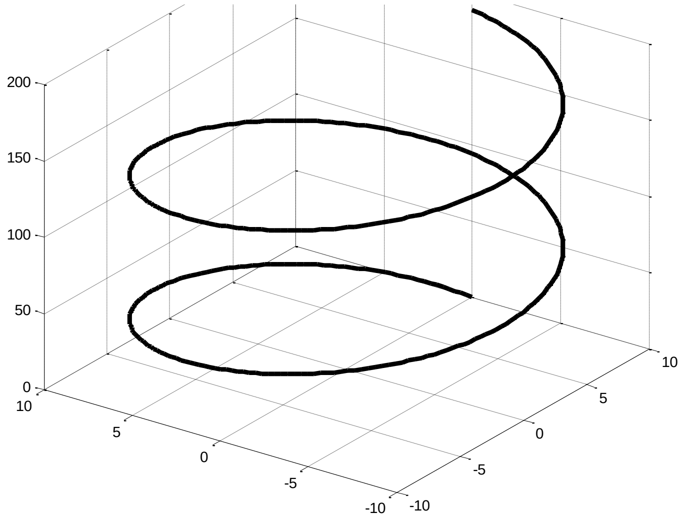


Рис. 2. Аксонометрія гвинтової лінії.

Параметричні рівняння гвинтової лінії від довільного параметра t:

$$\begin{cases} x(t) = R \cdot \cos t; \\ y(t) = R \cdot \sin t; \\ z(t) = b \cdot t, \end{cases} \tag{8}$$

де $R-$радіус циліндра, $b = \dfrac{h}{2\pi}$, $h-$крок гвинта.

$$s = \int \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}\,dt = \int \sqrt{(R\cos t)'^2 + (R\sin t)'^2 + (bt)'^2} \cdot dt =$$

$$= \int \sqrt{(-R\sin t)^2 + (R\cos)^2 + b^2} \cdot dt = \int \sqrt{R^2 + b^2} \cdot dt =$$

$$= \sqrt{R^2 + b^2} \cdot t + C, \quad C = 0.$$

Із останньої рівності маємо: $t(s) = \dfrac{s}{\sqrt{R^2 + b^2}}$.

Підставивши вираз $t(s) = \dfrac{s}{\sqrt{R^2 + b^2}}$ у рівняння (8), отримаємо *параметричні рівняння гвинтової лінії від натурального параметра:*

$$\begin{cases} x(s) = R \cdot \cos \dfrac{s}{\sqrt{R^2 + b^2}}; \\ y(s) = R \cdot \sin \dfrac{s}{\sqrt{R^2 + b^2}}; \\ z(s) = b \cdot \dfrac{s}{\sqrt{R^2 + b^2}}. \end{cases} \tag{9}$$

Розглянемо інший спосіб утворення параметричних рівнянь кривої від натурального параметра. Нехай просторова крива задана залежностями *кута підйому* $\beta = \beta(s)$ кривої в точці D між вектором дотичної $\bar{\tau}$ і площиною *Oxy* та виразом кривини $k = k(s)$ від довжини дуги s (рис.3). Тоді параметричні рівняння кривої від натурального параметра мають вид [3]:

$$x(s) = \int \cos\beta \cos\left(\int \frac{\sqrt{k^2 - \beta'^2}}{\cos\beta} ds \right) ds;$$

$$y(s) = \int \cos\beta \sin\left(\int \frac{\sqrt{k^2 - \beta'^2}}{\cos\beta} ds \right) ds; \qquad (10)$$

$$z(s) = \int \sin\beta \, ds.$$

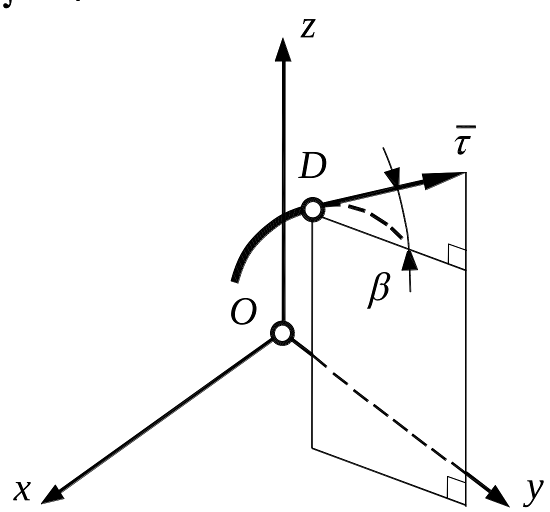


Рис. 3. Просторова крива, задана залежностями кута підйому і кривини.

Очевидно, що утворення параметричних рівнянь (10), зумовлене можливістю інтегрування цих виразів.

Приклад 1. Якщо просторова крива задана залежностями $\beta(s) = as$, $k(s) = \sqrt{b^2 \cos^2(as) + a^2}$, де a і b – постійні величини, то, підставивши їх у (10), отримаємо параметричні рівняння даної кривої від натурального параметра [3]:

$$x(s) = \frac{a\cos(bs)\sin(as) - b\cos(as)\sin(bs)}{a^2 - b^2};$$

$$y(s) = \frac{b\cos(as)\cos(bs) + a\sin(as)\sin(bs)}{a^2 - b^2}; \qquad (11)$$

$$z(s) = -\frac{\cos(as)}{a}.$$

На рис.4 побудовано криву, задану рівняннями (11) при $a = 4; b = 2$.

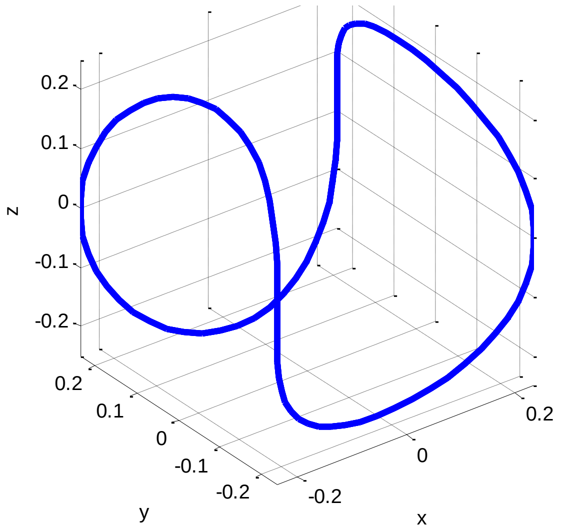


Рис.4. Крива, побудована за рівняннями (11).

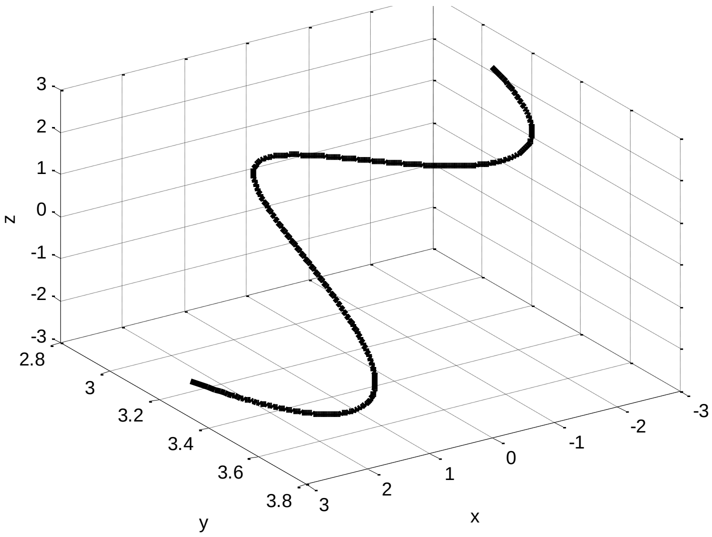
Приклад 2. Нехай просторова крива укосу задана залежністю $k(s)=\dfrac{1}{\sqrt{16a^2-s^2}}$, і кут підйому – сталий, $\beta=\dfrac{\pi}{4}$. Підставивши ці вирази у (10), отримаємо параметричні рівняння даної кривої укосу від натурального параметра [3]:

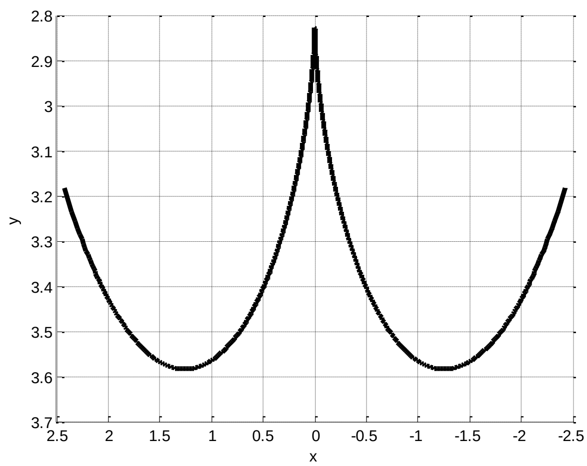
$$x(s)=\frac{2a\cos^2\beta}{1-\cos\beta}\sin\left[\frac{1-\cos\beta}{\cos\beta}\operatorname{Arc}\sin\left(\frac{s}{4a}\right)\right]+\frac{2a\cos^2\beta}{1+\cos\beta}\sin\left[\frac{1+\cos\beta}{\cos\beta}\operatorname{Arc}\sin\left(\frac{s}{4a}\right)\right];$$

$$y(s)=\frac{2a\cos^2\beta}{-1+\cos\beta}\cos\left[\frac{1-\cos\beta}{\cos\beta}\operatorname{Arc}\sin\left(\frac{s}{4a}\right)\right]-\frac{2a\cos^2\beta}{1+\cos\beta}\cos\left[\frac{1+\cos\beta}{\cos\beta}\operatorname{Arc}\sin\left(\frac{s}{4a}\right)\right]; \quad (12)$$

$$z(s)=s\cdot\sin\beta.$$

На рис.5 побудовано криву, задану рівняннями (12).





б

а

Рис. 5. Крива укосу, побудована за рівняннями (12):

а) аксонометрія кривої, б) горизонтальна проекція кривої.

Висновки. Утворення параметричних рівнянь просторової кривої від натурального параметра зумовлене можливістю виключення довільного параметра у виразі довжини дуги (6) або можливістю інтегрування виразів (10).