

**ХЫМЫЧ И.П., ЧОВНЮК Ю.В.**  
**АНАЛИТИЧЕСКИЙ ПОДХОД В АНАЛИЗЕ НЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАНИЙ**  
**НАВЕСНОЙ СЕЛЬСКОХОЗЯЙСТВЕННОЙ МАШИНЫ,**  
**ПРИСОЕДИНЁННОЙ К ТРАКТОРУ**

---

УДК 336

**Хымыч И.П.,**  
магистрант 1 курса факультета инженерии агробиосистем,  
научный руководитель: к.т.н., доцент **Ю.В. Човнюк,**  
Национальный университет биоресурсов и природопользования Украины,  
г. Киев, Украина

**АНАЛИТИЧЕСКИЙ ПОДХОД В АНАЛИЗЕ НЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАНИЙ**  
**НАВЕСНОЙ СЕЛЬСКОХОЗЯЙСТВЕННОЙ МАШИНЫ, ПРИСОЕДИНЁННОЙ К**  
**ТРАКТОРУ**

**Аннотация.** Приведен анализ нелинейных угловых колебаний навесной сельскохозяйственной машины при прямолинейном равномерном поступательном движении машинно-тракторного агрегата. Использована модель нелинейного математического маятника, позволяющая изучить основные кинематические и энергетические характеристики указанных колебаний.

**Ключевые слова:** анализ, нелинейность, колебания, навесное устройство, сельскохозяйственная машина, прямолинейность, равномерность, поступательность, движение, машинно-тракторный агрегат.

**Постановка проблемы.** Навесная сельскохозяйственная машина является составной частью единой взаимосвязанной механической системы - машинно-тракторного агрегата (МТА), поэтому изучение движения отдельно взятой навесной рабочей машины при заданном движении трактора заранее содержит неточность – не учитывается силовое воздействие навесной машины на трактор, отклоняющее его движение от заданного. Именно решению этой проблемы посвящено данное исследование.

**Анализ последних исследований и публикаций.** Нелинейное дифференциальное уравнение колебаний навесной сельскохозяйственной машины, присоединённой к трактору, при прямолинейном равномерном поступательном движении последнего получено в [1]. Анализ малых (линейных) колебаний указанной машины проведен в [2]. Нелинейные колебания системы не изучены. В настоящей работе предложены аналитические зависимости, описывающие основные характеристики нелинейных колебаний навесной машины МТА в рамках эллиптических функций Якоби.

**Цель статьи** состоит в обосновании целесообразного сочетания механических параметров движения навесной машины, при котором в системе создавалось бы значительное сопротивление возможным нелинейным колебаниям. Благодаря этому может быть обеспечено быстрое затухание её (навесной машины) свободных колебаний или их отсутствие – апериодическое движение.

При возникновении вынужденных колебаний, вызванных, например, поперечными колебаниями рамы трактора или неровностями рельефа поля, амплитуды колебаний машины останутся малыми, что также обусловлено большим сопротивлением в системе. Даже в случаях, когда рабочая машина имеет значительную массу и оказывает заметное влияние на движение трактора, выбор оптимальных механических параметров машины окажет стабилизирующее влияние на весь агрегат. Следовательно, изучение движения рабочей навесной машины как самостоятельного объекта можно считать одним из этапов в определении оптимальных механических параметров всего агрегата.

**Изложение основного материала.** При рассмотрении относительного движения сельскохозяйственной машины, присоединённой к трактору при помощи механизма на-

вески, предполагаем, что в горизонтальной плоскости механизм представляет собой шарнирный четырёхзвенник, стойка которого принадлежит раме трактора, а шатун – раме машины. Кривошип, связанные шарнирно со стойкой, имеют равные длины  $b$  и в начальном положении составляют равные углы  $\alpha$  с плоскостью (осью) симметрии механизма. Если длина стойки составляет  $2a$ , то длина шатуна составит  $2(a + b \sin \alpha)$  [1,2]. При перемещении механизма в смежное положение мгновенный центр вращения шатуна перемещается по плоскости, описывая дугу неподвижной центроиды. Будем считать, что перемещения шатуна относительно плоскости движения механизма (т.е. рамы машины относительно рамы трактора) приобретают значения, позволяющие пренебречь изучением самих центроид. Кроме того, поворот машины происходит относительно начального положения мгновенного центра вращения.

При исследовании движения машины необходимо также знать расположение на её раме центра масс и центра сопротивления. Считаем, что начальные положения этих центров и текущие положения совпадают (хотя последние зависят от конфигурации механизма навески).

В соответствии с приведенными выше соображениями колебания навесной машины можно рассматривать как нелинейные угловые колебания её рамы относительно начального положения мгновенного центра вращения.

Дифференциальное уравнение нелинейных колебаний навесной машины длины  $d$  имеет вид:

$$\ddot{\varphi} + 2n \cdot \dot{\varphi} + k^2 \cdot \sin \varphi = 0, \quad \dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{dt}, \quad \ddot{\varphi} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}, \quad (1)$$

где:  $\varphi$  – угол отклонения центра массы навесной машины от направления движения трактора (определяется вектором скорости его движения  $\vec{v}_0$ );

$n = \frac{D_0}{2J_{c_0} \cdot v_0} \cdot (\alpha_0 \cdot R \cdot D_0 + \beta_0)$ ;  $k^2 = \frac{1}{J_{c_0}} \cdot (\alpha_0 \cdot R \cdot D_0 + \beta_0)$ ;  $\alpha_0, \beta_0$  – коэффициенты (константы), оп-

ределяемые конфигурацией конкретной навески;  $J_{c_0} = J_s + m \cdot H^2$ ,  $J_s$  – момент инерции навесной машины относительно её вертикальной центральной оси,  $m$  – масса машины,  $H$  – расстояние от центра масс до мгновенного центра вращения;

$D_0 = d + b \cdot \cos \alpha + \frac{a}{\operatorname{tg} \alpha}$ ;  $\vec{R}$  – главный вектор сил сопротивления рабочих органов

( $|\vec{R}| = \text{const}$  при  $v_0 = \text{const}$ );  $t$  – время.

Приведём (1) к стандартному виду, введя замены:  
 $\tau = kt$ ;  $\varphi_\tau = \frac{d\varphi}{d\tau}$ ;  $\varphi_{\tau\tau} = \frac{d^2\varphi}{d\tau^2}$ ;  $\varepsilon = \frac{2n}{\omega_0}$ ;  $\omega_0 = k$ . Тогда получим:

$$\varphi_{\tau\tau} + \varepsilon \cdot \varphi_\tau + \sin \varphi = 0. \quad (2)$$

При уменьшении угла  $\alpha$  до нуля шарнирный четырёхзвенник превращается в шарнирный параллелограмм. Этот предельный случай имеет некоторые особенности, требующие отдельного рассмотрения параллелограммной навески [2].

Можно показать, что в этом случае общий вид уравнения (2) остаётся неизменным, а меняются лишь следующие коэффициенты:

$$\varepsilon = \frac{\alpha_0 \cdot R}{m v_0 \cdot \omega_0}; \quad \omega_0 = k = \sqrt{\frac{R}{ml}}, \quad (3)$$

где  $l$  – длина стержней параллелограммной навески.

Определим решения нелинейного уравнения (2) для двух случаев: 1)  $\varepsilon = 0$ ; 2)  $0 < \varepsilon \ll 1$ .

**ХЫМЫЧ И.П., ЧОВНЮК Ю.В.**  
**АНАЛИТИЧЕСКИЙ ПОДХОД В АНАЛИЗЕ НЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАНИЙ**  
**НАВЕСНОЙ СЕЛЬСКОХОЗЯЙСТВЕННОЙ МАШИНЫ,**  
**ПРИСОЕДИНЁННОЙ К ТРАКТОРУ**

---

Случай 1.  $\varepsilon = 0$ . В этом случае (2) описывает нелинейные колебания кругового математического маятника [3]:

$$\varphi_{\tau\tau} + \sin \varphi = 0. \quad (4)$$

Если ввести выражение для «полной энергии» колебаний вида:

$$E = \frac{1}{2} \cdot (\varphi_{\tau})^2 + (1 - \cos \varphi), \quad (5)$$

тогда (4) имеет решение, которое можно представить в квадратурах.

При малых «энергиях»  $E < 2$  окончательное решение для нелинейных колебаний маятника имеет вид:

$$\varphi = 2 \cdot \arcsin\{k_1 \cdot \operatorname{sn}(\tau, k_1)\}, \quad k_1 = \sqrt{\frac{E}{2}}, \quad (6)$$

где  $\operatorname{sn}(\tau, k_1)$  – эллиптический синус Якоби от аргумента  $\tau$  с модулем  $k_1$  [4]. Модуль  $k_1$  определяет «энергию» и частоту нелинейных колебаний осциллятора:

$$E = 2k_1^2, \quad \omega = \frac{\omega_0 \cdot \pi}{2K}, \quad (7)$$

где  $K(k_1)$  – полный эллиптический интеграл первого рода с модулем  $k_1$  [4].

При больших «энергиях»  $E > 2$  вращательное движение маятника описывается функцией:

$$\varphi = 2 \cdot \arcsin\{\operatorname{sn}(\tau / k_2, k_2)\} \equiv 2 \cdot \operatorname{am}(\tau / k_2, k_2), \quad k_2 = \sqrt{2/E}, \quad (8)$$

где  $\operatorname{am}(u, k_2)$  – эллиптическая амплитуда от аргумента  $u$  для модуля  $k_2$ .

В случае вращательных движений маятника его «энергия» и частота вращений определяются из выражений:

$$E = \frac{2}{k_2^2}, \quad \omega = \frac{\omega_0 \cdot \pi}{2k_2 \cdot K(k_2)}. \quad (9)$$

Сепаратрисы, отделяющие траектории нелинейных колебательных движений от траекторий нелинейных вращательных движений, соответствуют значению полной «энергии»  $E = 2$ , а сепаратрисное решение имеет вид:

$$\varphi = -\pi + 4 \cdot \operatorname{arctg}[\exp(\tau)] \quad (10)$$

Естественно, что в случае (10) необходимо подставлять значения  $\omega_0 = k$  в соответствии с типом навески на трактор.

Случай 2.  $0 < \varepsilon \ll 1$ . В этом случае применим метод Ван-дер-Поля для нелинейного порождающего уравнения (4), приведенный в [3]. Тогда получим следующее решение уравнения (2) (для случая нелинейных колебаний):

$$\varphi = 2 \cdot \arcsin\left\{\sqrt{\frac{E}{2}} \cdot \operatorname{sn}\left[\frac{2}{\pi} \cdot K\left(\sqrt{\frac{E}{2}}\right) \cdot \omega \cdot t, \sqrt{\frac{E}{2}}\right]\right\}. \quad (11)$$

Здесь  $\omega = \frac{\omega_0 \cdot \pi}{2 \cdot K\left(\sqrt{\frac{E}{2}}\right)}$ , а значение  $E$  (полной «энергии» колебаний маятника) зависит от  $t$ .

(Поэтому и  $\omega = \omega(t)$ ). Для функции  $E = E(\tau) = E(\omega_0 \cdot t)$  можно получить следующее дифференциальное уравнение:

$$\frac{dE}{d\tau} = -4\varepsilon \cdot \left\{ \frac{\bar{E}(k_1)}{K(k_1)} - 1 + k_1^2 \right\}, \quad (12)$$

где  $\bar{E}(k_1)$  – полный эллиптический интеграл второго рода по модулю  $k_1$  [4].

Для малоамплитудных колебаний ( $k_1 \ll 1$ ) можно положить [3]  $\frac{\bar{E}(k_1)}{K(k_1)} \approx 1 - \frac{k_1^2}{2}$ , тогда соотношение (12) определяет скорость диссипации «энергии» нелинейных колебаний,

---

вытекающую из (7), а именно:  $\frac{dE}{d\tau} = -\varepsilon \cdot E$ . Однако экспоненциально медленное убывание энергии происходит только в линейном режиме. В обратном предельном случае ( $k_1 \rightarrow 1$ ), когда исходная «энергия» нелинейных колебаний маятника близка к  $E = 2$ , диссипация происходит по другому закону. В этом случае  $K(k_1) \approx -\frac{1}{2} \cdot \ln(1 - k_1^2)$ ,  $\bar{E}(k_1) \approx 1$ , и имеем:

$$\frac{dE}{d\tau} \cong 8 \cdot \varepsilon / \ln\left(\frac{2-E}{2}\right). \quad (13)$$

Решая это уравнение приближённо аналитическим способом, получаем следующее соотношение:

$$E \approx 2 \cdot (1 - 4\varepsilon(\tau - \tau_0)), \quad (14)$$

где  $\tau_0 = \omega_0 \cdot t_0$ ,  $t_0$  – константа интегрирования (4), которую можно полагать равной нулю. Закон  $E(\tau)$  (14) описывает линейное убывание «энергии» нелинейных колебаний на начальном этапе диссипации. (Естественно, что  $\omega_0$  выбираем в зависимости от конфигурации и структуры навески на трактор).

#### Выводы

1. Обоснована модель для анализа нелинейных колебаний навесной сельскохозяйственной машины при прямолинейном равномерном поступательном движении машинно-тракторного агрегата.
2. Полученные в работе результаты могут быть в дальнейшем использованы для уточнения и усовершенствования существующих инженерных методов расчёта колебательных режимов в подобных системах как на стадиях их проектирования/конструирования, так и в режимах реальной эксплуатации, а также для оптимизации их устойчивых режимов движения.

#### Список литературы

1. Гячев Л.В. Устойчивость движения сельскохозяйственных машин и агрегатов/Л.В. Гячев. – М.: Машиностроение, 1981. – 206с.
2. Гячев Л.В. Динамика машинно-тракторных и автомобильных агрегатов/Л.В. Гячев. – Ростов-на-Дону: Изд-во Ростовского университета, 1976. – 192с.
3. Косевич А.М. Введение в нелинейную физическую механику/А.М. Косевич, А.С. Ковалёв. – К.: Наукова думка, 1989. – 304с.
4. Янке Е. Специальные функции/Е. Янке, Ф. Эмде, Ф. Леш. – М.: Наука, 1964. – 344с.

**Анотація.** Приведений аналіз нелінійних кутових коливань навісної сільськогосподарської машини при прямолінійному рівномірному поступальному русі машинно-тракторного агрегату. Використана модель нелінійного математичного маятника, яка дозволяє вивчити основні кінематичні й енергетичні характеристики вказаних коливань.

**Ключові слова:** аналіз, нелінійність, коливання, навісний пристрій, сільськогосподарська машина, прямолінійність, рівномірність, поступальність, рух, машинно-тракторний агрегат.

**Abstract.** The analysis of nonlinear angle oscillations of the mounting agricultural machine during its rectilinear uniform translation is proposed. One may use the model of nonlinear mathematical pendulum which gives a possibility to investigate the main kinematical and energetic characteristics of these oscillations.

**Key words:** analysis, nonlinearity, oscillations, mounting, agricultural machine, rectilinearity, uniformity, translation, motion, machine's – tractor aggregate.