УДК 336

Похыленко Е.А.,
магистрант 1 курса факультета инженерии агробиосистем,
научный руководитель: к.т.н., доцент **Ю.В. Човнюк**
Национальный университет биоресурсов и природопользования Украины,
г. Киев, Украина

АНАЛИЗ НЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАНИЙ ПРИЦЕПНОЙ СЕЛЬСКОХОЗЯЙСТВЕННОЙ МАШИНЫ ПРИ ПРЯМОЛИНЕЙНОМ РАВНОМЕРНОМ ПОСТУПАТЕЛЬНОМ ДВИЖЕНИИ МАШИННО-ТРАКТОРНОГО АГРЕГАТА

Аннотация. Приведен анализ нелинейных угловых колебаний прицепной сельскохозяйственной машины при прямолинейном равномерном поступательном движении машинно-тракторного агрегата. Использована модель нелинейного математического маятника, позволяющая изучить основные кинематические и энергетические характеристики указанных колебаний.
Ключевые слова: анализ, нелинейность, колебания, прицеп, сельскохозяйственная машина, прямолинейность, равномерность, поступательность, движение, машинно-тракторный агрегат.

Постановка проблемы. Прицепная сельскохозяйственная машина является составной частью единой взаимосвязанной механической системы - машинно-тракторного агрегата (МТА), поэтому изучение движения отдельно взятой прицепной рабочей машины при заданном движении трактора заранее содержит неточность – не учитывается силовое воздействие машины на трактор, отклоняющее его движение от заданного. Именно решению этой проблемы посвящено данное исследование.

Анализ последних исследований и публикаций. Нелинейное дифференциальное уравнение колебаний прицепной сельскохозяйственной машины, шарнирно присоединённой к трактору, при прямолинейном равномерном поступательном движении последнего получено в [1]. Анализ малых (линейных) колебаний указанной машины проведен в [2]. Нелинейные колебания системы не изучены. В настоящей работе предложены аналитические зависимости, описывающие основные характеристики нелинейных колебаний прицепа МТА в рамках эллиптических функций Якоби.

Цель статьи состоит в обосновании целесообразного сочетания механических параметров движения прицепной машины, при котором в системе создавалось бы значительное сопротивление возможным нелинейным колебаниям. Благодаря этому может быть обеспечено быстрое затухание её (прицепной машины) свободных колебаний или их отсутствие – апериодическое движение.

При возникновении вынужденных колебаний, вызванных, например, поперечными колебаниями рамы трактора или неровностями рельефа поля, амплитуды колебаний машины останутся малыми, что также обусловлено большим сопротивлением в системе. Даже в случаях, когда рабочая машина имеет значительную массу и оказывает заметное влияние на движение трактора, выбор оптимальных механических параметров машины окажет стабилизирующее влияние на весь агрегат. Следовательно, изучение движения рабочей прицепной машины как самостоятельного объекта можно считать одним из этапов в определении оптимальных механических параметров всего агрегата.

Изложение основного материала. Для симметричных рабочих органов прицепной машины сельскохозяйственного предназначения и конечных углов её поворота нелинейное уравнение колебаний имеет вид [1]:

$$J_0 \cdot \ddot{\varphi} + \frac{(\alpha_0 \cdot Rd + \beta_0) \cdot (d \cdot \dot{\varphi} + v_0 \cdot \sin\varphi)}{\sqrt{v_0{}^2 \cdot \cos^2\varphi + (d \cdot \dot{\varphi} + v_0 \cdot \sin\varphi)^2}} = 0, \tag{1}$$

где: J_0 – момент инерции машины относительно оси OZ, проходящей через точку прицепа; $\ddot{\varphi} = \dfrac{d^2\varphi}{dt^2}$ – угловое ускорение машины; $\dot{\varphi} = \dfrac{d\varphi}{dt}$ – её угловая скорость; t – время; φ – текущий угол отклонения плоскости симметрии машины от линии действия вектора $\vec{v}_0$ скорости точки прицепа; α_0, β_0 – константы, характеризующие конструкцию прицепной машины (на данной скорости v_0 её движения); d – длина машины (расстояние между точкой прицепа и центром сопротивления движению МТА); $\vec{R}$ – главный вектор сил сопротивления рабочих органов ($|\vec{R}| = const$ при $v_0 = const$). Если рабочие органы прицепной машины простейшей формы (т.е. машина снабжена рабочими органами, имеющими форму вертикальных цилиндрических стержней), тогда $\alpha_0 = 1$, $\beta_0 = 0$.

Преобразовывая точное уравнение (1), приведём его к виду:

$$J_0 \ddot{\varphi} + \frac{(\alpha_0 \cdot Rd + \beta_0)}{\sqrt{1 + 2(\dot{\varphi}d / v_0) \cdot \sin\varphi + (\dot{\varphi}d / v_0)^2}} \cdot \left(\frac{d \cdot \dot{\varphi}}{v_0} + \sin\varphi \right) = 0. \tag{2}$$

При $\dot{\varphi}d / v_0 << 1$ и немалых углах φ из (2) получим уравнение:

$$J_0 \cdot \ddot{\varphi} + (\alpha_0 \cdot Rd + \beta_0) \cdot \left(\frac{d \cdot \dot{\varphi}}{v_0} + \sin\varphi \right) = 0. \tag{3}$$

Представим это уравнение в каноническом виде (т.е. в виде уравнения нелинейных колебаний математического маятника с вязким трением):

$$\ddot{\varphi} + \frac{(\alpha_0 \cdot Rd + \beta_0) \cdot d}{v_0 \cdot J_0} \cdot \dot{\varphi} + \frac{(\alpha_0 \cdot Rd + \beta_0)}{J_0} \cdot \sin\varphi = 0 \tag{4}$$

и примем обозначения [3]: $\tau = \omega_0 \cdot t$, $\varphi_\tau = \dfrac{d\varphi}{d\tau}$, $\varphi_{\tau\tau} = \dfrac{d^2\varphi}{d\tau^2}$, $\dfrac{(\alpha_0 \cdot Rd + \beta_0) \cdot d}{\omega_0 \cdot v_0 \cdot J_0} = \varepsilon << 1$,

$\omega_0{}^2 = \dfrac{(\alpha_0 \cdot Rd + \beta_0)}{J_0}$. Тогда (4) можно представить в виде:

$$\varphi_{\tau\tau} + \sin\varphi = -\varepsilon \cdot \varphi_\tau, \tag{5}$$

где $\varphi = \varphi(\tau)$. Порождающее уравнение (при $\varepsilon = 0$) для (5) имеет вид:

$$\varphi_{\tau\tau} + \sin\varphi = 0. \tag{6}$$

Уравнение (6) описывает динамику кругового математического маятника без затухания. Его точные решения выражаются через эллиптические функции Якоби. Если воспользоваться выражением для «полной энергии» колебаний [3]:

$$E = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{d\varphi}{d\tau} \right)^2 + (1 - \cos\varphi), \tag{7}$$

то можно представить решение (6) в квадратурах. При этом после замены $z = \sin(\varphi / 2)$ зависимость $\tau = \tau(z)$ выражается через эллиптический интеграл первого рода, для которого существует стандартное обозначение [4]:

$$F(\varphi, k) = \int_0^{\varphi} \frac{dq}{\sqrt{1 - k^2 \cdot \sin^2 q}} \equiv \int_0^{\sin\varphi} \frac{du}{\sqrt{(1 - u^2) \cdot (1 - k^2 \cdot u^2)}}. \tag{8}$$

Здесь параметр k – модуль эллиптического интеграла. Аргумент эллиптического интеграла (8) φ обращается в $\frac{\pi}{2}$ тогда, когда сам интеграл – в полный эллиптический интеграл первого рода: $F\left(\frac{\pi}{2},\ k\right) = K(k)$. Для записи решения (6) в явной форме введём функцию, обратную эллиптическому интегралу [3]. Если $F(\varphi, k) = \tilde{u}(\varphi)$, то обратная функция $\varphi(\tilde{u}) = am(\tilde{u}, k)$ представляет собой так называемую эллиптическую амплитуду [4]. Но обычно пользуются не функцией амплитуды, а тригонометрическими функциями этой величины [3]. Так, синус амплитуды задаёт эллиптический синус или синус Якоби: $sn(\tilde{u}, k) = \sin\{am(\tilde{u}, k)\}$. Через эту функцию решение (6) записывается очень просто:

а) при малых «энергиях» $E < E_0 = 2\omega_0^2$ окончательное решение для нелинейных колебаний математического маятника имеет вид:

$$\varphi = 2\arcsin\{k_1 \cdot sn(\omega_0 \cdot t,\ k_1\}, \tag{9}$$

где k_1 – эллиптический модуль эллиптического интеграла первого рода:

$$k_1 = \sqrt{E/(2\omega_0^2)}, \tag{10}$$

определяющий энергию и частоту (нелинейную) осциллятора:

$$E = E_0 \cdot k_1^2,\ \ \omega = \omega_0 \cdot \pi/(2K);\ \ K = K(k_1); \tag{11}$$

б) при больших «энергиях» $E > E_0$ вращение математического маятника описывается функцией:

$$\varphi = 2\arcsin\{\omega_0 \cdot t/k_2,\ k_2\} \equiv 2 \cdot am(\omega_0 \cdot t/k_2, k_2), \tag{12}$$

где $k_2 = \sqrt{\frac{E_0}{E}} = \sqrt{\frac{2\omega_0^2}{E}}$ и $\frac{\omega}{\omega_0} = \pi/(2k_2 \cdot K),\ K = K(k_2)$.

Решения типа (п. а)) определяют колебательные движения маятника (6), а решения типа (п. б)) – его вращательные движения. Сепаратрисы, отделяющие траектории колебательных движений от траекторий вращательных движений, соответствуют значению «полной энергии» $E = 2\omega_0^2$, а сепаратрисное решение имеет вид:

$$\varphi = -\pi + 4 \cdot arctg[\exp(\omega_0 \cdot t)]. \tag{13}$$

Для отыскания решения для случая нелинейных колебаний маятника со слабым трением (5) воспользуемся методами
Ван-дер-Поля и Крылова – Боголюбова (в случае нелинейного порождающего уравнения), изложенными и обоснованными в [3, 5-7].

Порождающее уравнение (6) имеет колебательное решение при $E < E_0 = 2\omega_0^2$. В случае больших амплитуд левую часть уравнения (5) нельзя линеаризовать и необходимо воспользоваться точным решением порождающего уравнения (9). Учитывая выражения (11) для частоты и энергии колебания, вводим фазу колебания $\psi = \omega \cdot (t - t_0)$, в которой t_0 – произвольная константа интегрирования (полагаем её в дальнейшем равной нулю), ω – частота периодического решения (11), и переписываем (9) в виде:

$$Q = 2\arcsin\left\{\sqrt{\frac{E}{E_0}} \cdot sn\left[\frac{2}{\pi} \cdot K\left(\sqrt{\frac{E}{E_0}}\right) \cdot \psi,\ \sqrt{\frac{E}{E_0}}\right]\right\}. \tag{14}$$

Для определения скорости изменения энергии со временем необходимо вычислить производную:

$$Q_\psi = \frac{\partial Q}{\partial \psi} = \frac{4}{\pi} \cdot k_1 \cdot K\left(\sqrt{\frac{E}{E_0}}\right) \cdot cn\left(\frac{2}{\pi} \cdot K\left(\sqrt{\frac{E}{E_0}}\right) \cdot \psi,\ k_1\right), \tag{15}$$

где $k_1 = \sqrt{\dfrac{E}{E_0}}$, $cn(\bar{u},\ k_1)$ – эллиптический косинус Якоби с модулем k_1 и зависящий от аргумента $\bar{u}$.

Подставляя (15) в укороченные уравнения [3], полученные усреднением по фазе ψ точных уравнений (т.н. укороченные уравнения Ван-дер-Поля), имеем окончательное выражение для скорости изменения энергии:

$$\frac{dE}{d\tau} = -2\varepsilon\omega_0^2 \cdot \frac{k_1^2}{K(k_1)} \cdot \int_0^{2K(k_1)} cn^2 z dz = -4\varepsilon\omega_0^2 \cdot \left\{ \frac{\bar{E}(k_1)}{K(k_1)} - 1 + k_1^2 \right\}, \tag{16}$$

где $\bar{E}(k_1)$ – полный эллиптический интеграл второго рода модулем k_1 [4]. Используя (16), можно определить дифференциальное уравнение для E:

$$\frac{dE}{d\tau} = -2\varepsilon \cdot \frac{E}{k_1} \cdot \left\{ \frac{\bar{E}(k_1)}{K(k_1)} - 1 + k_1^2 \right\},\ k_1 = \sqrt{\frac{E}{2\omega_0^2}}. \tag{17}$$

Это уравнение можно проинтегрировать численно на ПЭВМ и найти зависимость $E = E(t)$.

Для малоамплитудных колебаний $(k_1 << 1)$ полагаем $\dfrac{\bar{E}(k_1)}{K(k_1)} \approx 1 - \dfrac{k_1^2}{2}$, тогда соотношение (16) определяет скорость диссипации энергии, вытекающую из (11), а именно: $\dfrac{dE}{d\tau} = -\varepsilon \cdot E.$ Однако экспоненциально медленное убывание энергии происходит только в линейном режиме. В обратном предельном случае $(k_1 \to 1)$, когда исходная «энергия» математического маятника близка к E_0, диссипация происходит по другому закону. В этом случае $K(k_1) \approx -\dfrac{1}{2} \cdot \ln(1 - k_1^2)$,

$\bar{E}(k_1) \approx 1$, и имеем:

$$\frac{dE}{d\tau} \cong 8\varepsilon\omega_0^2 / \ln\left(\frac{E_0 - E}{E_0} \right). \tag{18}$$

Решая это уравнение (18) приближённо, получаем, следующее соотношение:

$$E \approx E_0 \cdot [1 - 4\varepsilon \cdot (\tau - \tau_0)],\ \tau_0 = \omega_0 \cdot t_0, \tag{19}$$

которое описывает линейное убывание энергии на начальном этапе диссипации.

Выводы

1. Обоснована модель для анализа нелинейных колебаний прицепной сельскохозяйственной машины при прямолинейном равномерном поступательном движении машинно-тракторного агрегата.
2. Полученные в работе результаты могут быть в дальнейшем использованы для уточнения и усовершенствования существующих инженерных методов расчёта колебательных режимов в подобных системах как на стадиях их проектирования/конструирования, так и в режимах реальной эксплуатации, а также для оптимизации их устойчивых режимов движения.

Список литературы

1. Гячев Л.В. Устойчивость движения сельскохозяйственных машин и агрегатов/Л.В. Гячев. – М.: Машиностроение, 1981. – 206с.
2. Гячев Л.В. Динамика машинно-тракторных и автомобильных агрегатов/Л.В. Гячев. – Ростов-на-Дону: Изд-во Ростовского университета, 1976. – 192с.

3. Косевич А.М. Введение в нелинейную физическую механику/А.М. Косевич, А.С. Ковалёв. – К.: Наукова думка, 1989. – 304с.
4. Янке Е. Специальные функции/Е. Янке, Ф. Эмде, Ф. Леш. – М.: Наука, 1964. – 344с.
5. Андронов А.А. Теория колебаний/А.А. Андронов, А.А. Витт, С.Э. Хайкин. – М.: Наука, 1981. – 568с.
6. Блакьер О. Анализ нелинейных систем/О. Блакьер. – М.: Мир, 1969. – 400с.
7. Боголюбов Н.Н. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний/Н.Н. Боголюбов, Ю.А. Митропольский. – М.: Физматгиз, 1963. – 410с.

Анотація. Приведений аналіз нелінійних кутових коливань причіпної сільськогосподарської машини при прямолінійному рівномірному поступальному русі машинно-тракторного агрегату. Використана модель нелінійного математичного маятника, яка дозволяє вивчити основні кінематичні й енергетичні характеристики вказаних коливань.
Ключові слова: аналіз, нелінійність, коливання, причеп, сільськогосподарська машина, прямолінійність, рівномірність, поступальність, рух, машинно-тракторний агрегат.
Abstract. The analysis of nonlinear angle oscillations of the trailed agricultural machine during its rectilinear uniform translation is proposed. One may use the model of nonlinear mathematical pendulum which gives a possibility to investigate the main kinematical and energetic characteristics of these oscillations.
Key words: analysis, nonlinearity, oscillations, trailer, agricultural machine, rectilinearity, uniformity, translation, motion, machine's – tractor aggregate.